

Introduzione agli Algoritmi

19 Giugno 2014

Prof. Emanuela Fachini (canale AL) e Prof. Irene Finocchi (canale MZ)

Parte I

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Negli esercizi di progettazione, prima di passare allo pseudocodice, si descriva l'idea algoritmica sottostante. Per tutti gli algoritmi progettati è inoltre necessario analizzare correttezza e tempo di esecuzione.

Esercizio 1

Si consideri la seguente funzione:

```
test (intero n)
  if n ≤ 81 then return 1
  k = 1
  h = 1
  while k ≤ n do
    for j=1 to k do h++
    k = k+2
  return 9*h + test(n/3)
```

Si scriva la relazione di ricorrenza che descrive il tempo di esecuzione $T(n)$ della funzione *test* e la si risolva.

Esercizio 2

Si progetti un algoritmo che, preso un array di interi, ne ridistribuisca i valori in modo tale che ogni elemento risulti maggiore dei suoi immediati vicini sinistro e destro o minore di essi.

Se dimostri la correttezza dell'algoritmo proposto motivando le scelte progettuali e se ne analizzi il tempo di esecuzione nel caso migliore e nel caso peggiore. L'algoritmo dovrebbe avere tempo di esecuzione $\Theta(n \log n)$ nel caso peggiore.

E' possibile risolvere il problema in tempo asintoticamente inferiore a $\Theta(n \log n)$? Motivare la risposta.

Introduzione agli Algoritmi

19 giugno 2014

Prof. Emanuela Fachini (canale AL) e Prof. Irene Finocchi (canale MZ)

Parte II

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Negli esercizi di progettazione, prima di passare allo pseudocodice, si descriva l'idea algoritmica sottostante. Per tutti gli algoritmi progettati è inoltre necessario analizzare correttezza e tempo di esecuzione.

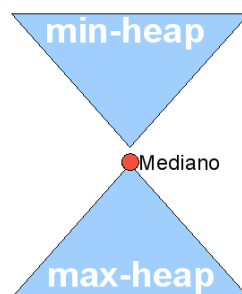
Esercizio 1

- A. Qual è il minimo numero di nodi che può avere un albero AVL di altezza h ? Si motivi la risposta.
- B. Qual è il massimo numero di nodi che può avere un albero AVL di altezza h ? Si motivi la risposta.
- C. E' vero che in un AVL il minimo si trova in una foglia o nel penultimo livello? Si motivi la risposta.
- D. Si dia la regola di costruzione degli alberi di Fibonacci e si dimostri che un AVL ha altezza logaritmica rispetto al numero dei nodi.
- E. L'altezza di un albero AVL è sempre \geq , \leq , o $=$ a quella di un albero binario completo almeno fino al penultimo livello con lo stesso numero di nodi?

Esercizio 2

L'elemento mediano di un insieme di n elementi è l'elemento che occuperebbe la posizione $\lceil n/2 \rceil$ se gli elementi fossero ordinati.

La struttura dati *heap-a-clessidra* mantiene un max-heap H_{\max} e un min-heap H_{\min} disposti "a clessidra" come mostrato in figura:



Assumete per semplicità che tutti gli elementi siano distinti. In un heap a clessidra valgono le seguenti proprietà:

Introduzione agli Algoritmi

19 Giugno 2014

Prof. Emanuela Fachini (canale AL) e Prof. Irene Finocchi (canale MZ)

- Il nodo di congiungimento dei due heap contiene l'elemento mediano;
- H_{\min} è un min-heap che contiene tutti gli elementi maggiori del mediano, oltre al mediano stesso;
- H_{\max} è un max-heap che contiene tutti gli elementi minori del mediano, oltre al mediano stesso.

Poiché la radice del min-heap, che è anche la radice del max-heap, deve essere il mediano dell'insieme degli elementi nei due heap, la seguente proprietà P deve essere sempre vera:

$$|H_{\max}| = |H_{\min}| \text{ oppure } |H_{\min}| = |H_{\max}| + 1$$

a seconda che il numero totale di elementi sia dispari ($|H_{\max}| = |H_{\min}|$) o pari ($|H_{\min}| = |H_{\max}| + 1$).

I due heap H_{\max} e H_{\min} siano rappresentati in memoria tramite due strutture dati separate (l'elemento mediano è quindi ripetuto, mentre ogni altro elemento compare in uno solo dei due heap).

1. Come implementereste l'operazione di *cancellazione del mediano in un heap a clessidra*? Conviene utilizzare come subroutine le procedure viste a lezione per gli heap (max-heap e min-heap).
2. Analizzate il tempo di esecuzione, che dovrebbe essere in $O(\log n)$.
3. Analizzate inoltre la correttezza: dopo l'estrazione del mediano, la radice dei due heap deve contenere il nuovo mediano dell'insieme, che ora avrà un elemento in meno (in altre parole, la proprietà P deve rimanere vera).