Esercizi relazioni di ricorrenza: il caso di una previsione sbagliata

Previsione sbagliata

Supponiamo di aver fatto una previsione sbagliata sulla relazione di ricorrenza

$T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(n) = T(n/4) + c\lg n$ altrimenti.

Supponiamo di aver concluso che $T(n) = O(\lg n)$.

Vogliamo far vedere come possiamo accorgercene durante la prova induttiva.

Quindi cerchiamo di dimostrare che $T(n) = O(\lg n)$, cioè che esistano due costanti $b, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq b\lg n$, per ogni $n \geq n_0$

Previsione sbagliata

Ipotesi induttiva: la tesi è vera per tutti i valori $m < n$, quindi $T(n/4) \le b \lg n/4$

$T(n) = T(n/4) + c\lg n \le b\lg n/4 + c \lg n =$

$b(\lg n - 2) + c \lg n = b\lg n - 2b + c \lg n$

Vediamo se esiste un valore di b che rende vera la seguente disuguaglianza:

$b\lg n - 2b + c \lg n \le b\lg n \Leftrightarrow$

$-2b + c \lg n \le 0 \Leftrightarrow c \lg n \le 2b$

Ma non esiste una costante che possa maggiorare una funzione crescente!

Quindi la nostra previsione era sbagliata.

Prova induttiva

Vogliamo far vedere che $T(n) = \Omega(\lg^2 n)$ cioè che esistono due costanti $b, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \geq b \lg^2 n$, per ogni $n \geq n_0$

Ipotesi induttiva: la tesi è vera per tutti i valori $m < n$

$T(n) = T(n/4) + c\lg n \geq b\lg^2 n/4 + c \lg n =$

$b(\lg n - \lg 4)^2 + c \lg n =$

$b(\lg^2 n + 4 - 4\lg n) + c \lg n$

Vediamo se esiste un valore di b che rende vera la disuguaglianza seguente:

$b(\lg^2 n + 4 - 4\lg n) + c \lg n \geq b\lg^2 n \Leftrightarrow$

$4b - 4b \lg n + c \lg n \geq 0 \Leftrightarrow$

$c \lg n \geq 4b \lg n - 4b$ questa disuguaglianza è vera se $b \leq c/4$, per ogni $n \geq 1$.

Prova induttiva: passo base

Abbiamo trovato che se $b \leq c/4$ per cui $T(n) \geq b\lg^2 n$, per ogni $n \geq 1$

Passo base:

Poiché $T(n) = d$ con $n \leq 1$

è vero che $T(1) \geq b\lg^2 1 = 0$ ma

$T(2) = T(2/4) + c = d + c$

$d + c \geq b\lg^2 2 = b$

Quindi se manteniamo la scelta $b = c/4$, questa va bene anche per il caso base, perchè $c/4 < c+d$.

Quindi esistono due costanti positive $b = c/4$ e $n_0 = 2$ tali che $T(n) \geq b\lg^2 n$, per ogni $n \geq n_0$.

In conclusione $T(n) = \Theta(\lg^2 n)$

Analisi

Si scriva e si risolva la relazione di ricorrenza che esprime la complessità asintotica nel caso peggiore dell'algoritmo seguente.

```
Rip (A,lo,hi)
 if (hi <= lo) return 0
 m = (lo+hi)/2
 count = Rip(A,lo, m) + Rip(A,m+1, hi);
 for i = lo to  m -1 do
       c1 = 0
      for j = lo  to m-1 do
             if A[i] == A[j]  then c1 = c1+1
            c2 = 0
            for j = m + 1 to hi -1  do
                  if A[i] == A[j] then c2 = c2+1
               if (c1 == 1 && c2 == 1) then count=count+1
 return count;
```

Analisi

Si scriva e si risolva la relazione di ricorrenza che esprime la complessità asintotica nel caso peggiore dell'algoritmo seguente.

```
Rip (A,lo hi)
 if (hi <= lo) return 0
m = (lo+hi)/2
count = Rip(A,lo, m) + Rip(A,m+1, hi);
for i = lo to  m -1 do                                  Θ((n/2)³)
      c1 = 0                                            Θ(1)
   for j = lo  to m-1 do                                Θ((n/2)²)
         if A[i] == A[j]  then c1 = c1+1                Θ(1)
      c2 = 0                                 Θ(1)
      for j = m + 1 to hi -1  do                        Θ(n/2)
         if A[i] == A[j] then c2 = c2+1                 Θ(1)
            if (c1 == 1 && c2 == 1) then count=count+1 Θ(1)
   return count;
```

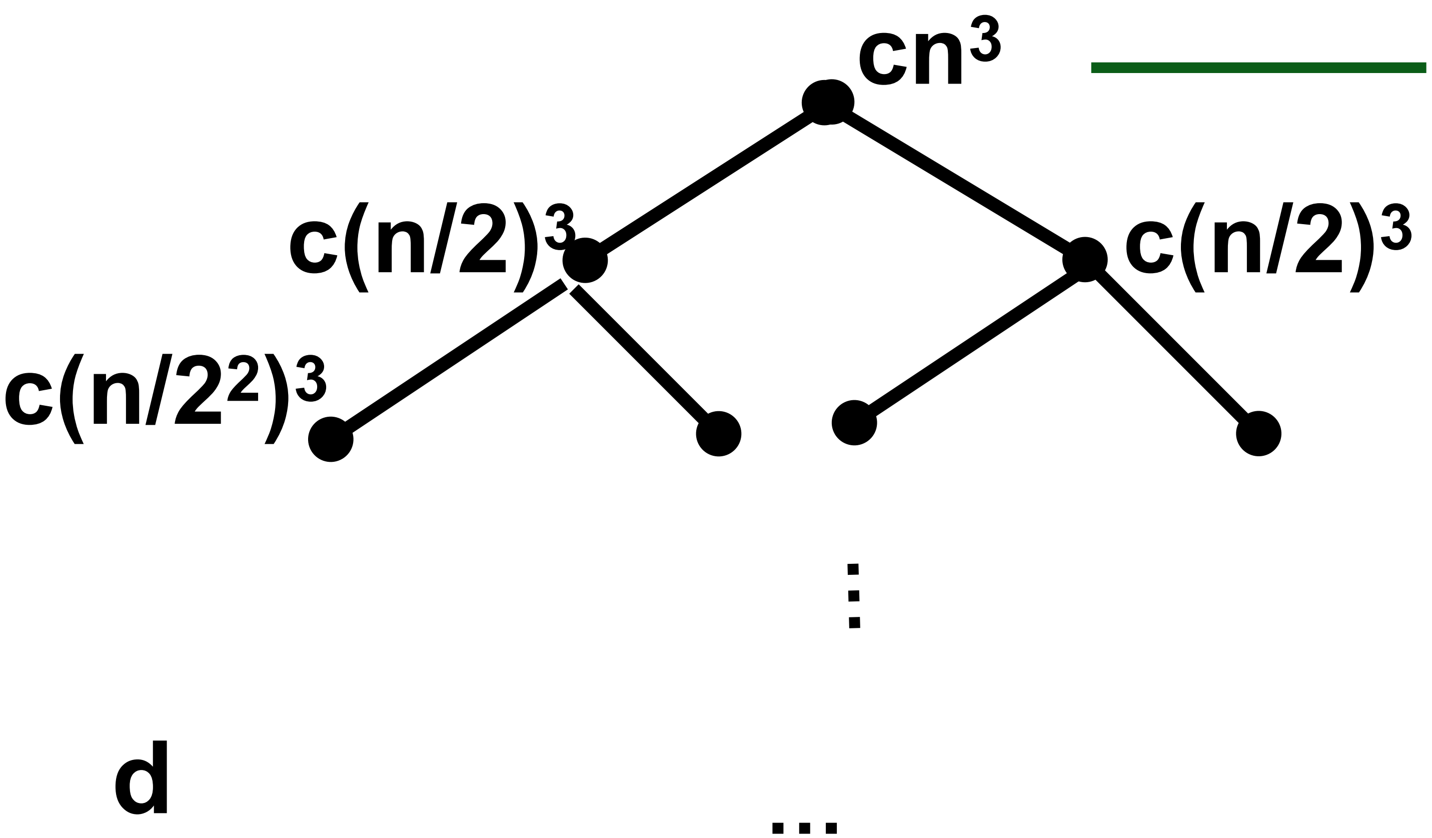
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta((n/2)^3) = 2T(n/2) + \Theta(n^3)$$

Previsione

Sia $n = 2^h$

$T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(n) = 2T(n/2) + cn^3$ altrimenti



cn^3

$2cn^3/2^3 = 1/2^2cn^3$

$2^2c(n/2^2)^3 = 1/2^4cn^3$

$2^{h-1}c(n/2^{h-1})^3 = 1/2^{2(h-1)}cn^3$

2^hd

L'albero ha altezza h e l'ultimo livello ha 2^h foglie di "costo" d.

Ogni livello i ha "costo" totale $1/2^{2i}cn^2$ quindi

$$T(n) = 2^h d + \sum_{0\leq i<h} cn^3/2^{2i} \leq nd + cn^3 \sum_{0\leq i<\infty} (1/4)^i = O(n^3)$$

Passo induttivo

$T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(n) = 2T(n/2) + cn^3$ altrimenti

Dimostriamo che $T(n) = O(n^3)$. Vogliamo far vedere che $T(n) = O(n^3)$ cioè che esistono due costanti positive $b, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq bn^3$, per ogni $n \geq n_0$

Ipotesi induttiva: la tesi è vera per tutti i valori $m < n$

$T(n) = 2T(n/2) + cn^3 \leq 2b(n/2)^3 + cn^3 =$

$bn^3/4 + cn^3$

Cerchiamo i valori di b che possono rendere vera la disuguaglianza:

$bn^3/4 + cn^3 \leq bn^3 \Leftrightarrow$

$bn^3 + 4cn^3 \leq 4bn^3 \Leftrightarrow$

$4cn^3 \leq 3bn^3$

questa disuguaglianza è vera se $b \geq 4/3c$, per ogni $n \geq 1$

Base

$T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(n) = 2T(n/2) + cn^3$ altrimenti

Sappiamo che $T(n) \leq bn^3$, per ogni $n \geq 1$ e $b \geq 4/3c$

Poiché $T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(2) = T(2/2) + c2^3 = 2d + 8c$

Cerchiamo b tale che

$T(2) \leq b*2^3$

$2d + 8c \leq b*2^3 = b*8$

Basta quindi prendere $b = d+c$ e $n_0 = 1$

Infatti $T(1) = d \leq d+c$

Concludiamo quindi che $T(n) = O(n^3)$.

Limite inferiore

$T(n) = d$ se $n \leq 1$

$T(n) = 2T(n/2) + cn^3$ altrimenti

Osservando che il termine aggiuntivo nella relazione di ricorrenza è cn^3, possiamo concludere che quello è anche un limite inferiore alla crescita di T, quindi possiamo dire che $T(n) = \Theta(n^3)$.