Esercizi relazioni di ricorrenza

Scrivere e risolvere la relazione di ricorrenza che descrive il tempo di esecuzione T(n) della funzione *test*.

```
test (intero n)
        if n ≤ 1 then return 1
        k = n*n
        while k ≥ 1 do k = k/2
        return k + 2*test(n/4)
```

Scrivere e risolvere la relazione di ricorrenza che descrive il tempo di esecuzione T(n) della funzione *test*.

```
test (intero n)
        if n ≤ 1 then return 1              Θ(1)
        k = n*n                             Θ(1)
        while k ≥ 1 do k = k/2              Θ(lg k)
        return k + 2*test(n/4)
```

Poiché $k = n^2$, le istruzioni al di fuori della chiamata ricorsiva sono eseguite in $\Theta(\lg n^2) = \Theta(\lg n)$.

La relazione è

$T(n) = \Theta(1)$ se $n \leq 1$
$T(n) = T(n/4) + \Theta(\lg n)$ altrimenti

Risolviamo:
$T(n) = d$ se $n \leq 1$
$T(n) = T(n/4) + c\lg n$ altrimenti

SVILUPPO

Supponendo per semplicità $n = 4^h$

$T(n) = T(n/4) + c\lg n =$

$T(n/4^2) + c\lg n/4 + c \lg n =$

$T(n/4^3) + c\lg n/4^2 + c\lg n/4 + c \lg n =$

…

$= T(n/4^i) + c\lg n/4^{i-1} + \ldots + c \lg n =$

…

$T(1) + \sum_{0\le i<h} c\lg n/4^i = d + \sum_{0\le i<h} c\lg n/4^i$

SVILUPPO 2

Abbiamo ottenuto

$T(n) = d + c \sum_{0 \le i < h} \lg n/4^i$

$= d + c\sum_{0 \le i < h}(\lg n - \lg(2^2)^i)$

$= d + c\sum_{0 \le i < h}(\lg n - \lg(2^{2i}))$

$= d + c\sum_{0 \le i < h}(\lg n - 2i)$

$\le d + c\sum_{0 \le i < h}\lg n$ (maggiorando ogni termine con lg n)

$\le d + ch\lg n$

$= d + c\log_4 n \lg n$ perchè $n = 4^h$

$= d + c1/2\lg n \lg n = d + 1/2c\lg^2 n$

$= O(\lg^2 n)$

$\log_4 n = 1/2\lg n$, infatti $n = 4^x = 2^{2x}$ e quindi

$x = \log_4 n$ e $2x = \lg n$

Prova induttiva

Vogliamo far vedere che $T(n) = O(\lg^2 n)$ cioè che esistono due costanti positive $b, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq b\lg^2 n$, per ogni $n \geq n_0$

Ipotesi induttiva: la tesi è vera per tutti i valori $m < n$. Quindi

$$T(n) = T(n/4) + c\lg n \leq b\lg^2 n/4 + c \lg n$$

perchè per ipotesi induttiva $T(n/4) \leq b\lg^2 n/4$.

$$T(n) \leq b\lg^2 n/4 + c \lg n = b(\lg n - \lg 4)^2 + c \lg n =$$

$$b(\lg^2 n + 4 - 4\lg n) + c \lg n$$

Prova induttiva

Abbiamo ottenuto che
$T(n) \leq b(\lg^2 n + 4 - 4\lg n) + c \lg n$
Vediamo se posso trovare un valore di b che rende vera la disuguaglianza:
$b(\lg^2 n + 4 - 4\lg n) + c \lg n \leq b\lg^2 n \Leftrightarrow$

$4b - 4b \lg n + c \lg n \leq 0 \Leftrightarrow$

$c \lg n \leq 4b \lg n - 4b$

questa disuguaglianza è vera se $b \geq c$, per ogni $n \geq 4$

Prova induttiva: passo base

Vogliamo far vedere che $T(n) = O(\lg^2 n)$ cioè che esistono due costanti $b, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq b \lg^2 n$, per ogni $n \geq n_0$

Passo base: Poiché $T(n) = d$ se $n \leq 1$ non è vero che $T(1) \leq b \lg^2 1 = 0$ ma se prendiamo

$T(2) = T(2/4) + c = d + c$

Per $b = c+d$ e $n_0 = 2$ possiamo concludere che $T(n) = O(\lg^2 n)$