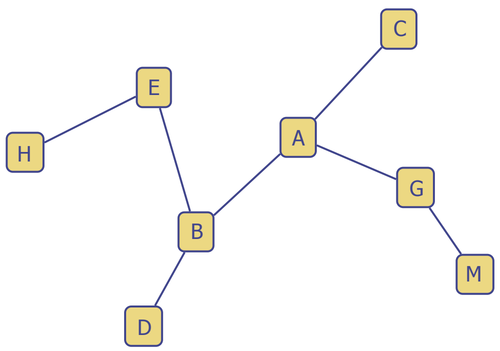
In questa lezione

Alberi, alberi binari, misure sugli alberi e loro relazioni.

[**CLRS] appendice B.5 Alberi.**

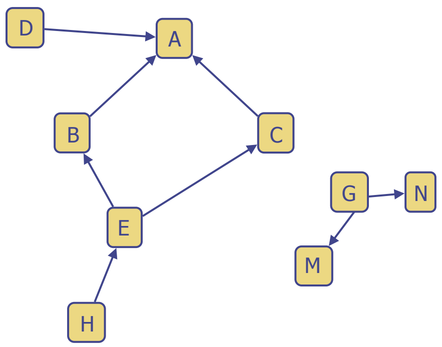
Alberi liberi

- Un albero libero è un grafo non diretto, connesso e aciclico.



Esempio di albero libero T

T:
Nodi = {A,B,C,D,E,H,G,M}
ARCHI={{A,B},{A,C},{A,G},{B,D},{B,E},{E,H},{G,M}}

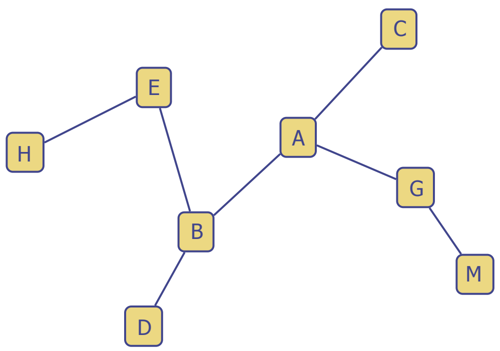


Esempio di grafo diretto, non connesso e aciclico, G

G:
Nodi = {A,B,C,D,E,H,G,M,N}
ARCHI={(B,A),(C,A},(D,A),(E,B),(E,C),(H,E),(G,M),(G,N)}

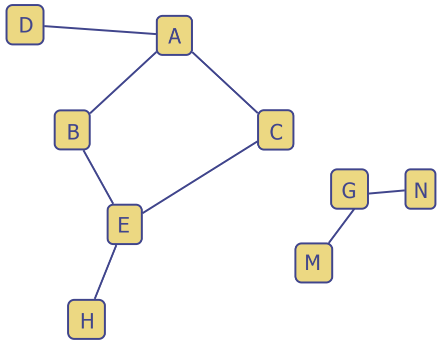
Alberi liberi

- Un albero libero è un grafo non diretto, connesso e aciclico.



Esempio di albero libero T

T:
Nodi = {A,B,C,D,E,H,G,M}
ARCHI={{A,B},{A,C},{A,G},
{B,D},{B,E},{E,H},{G,M}}

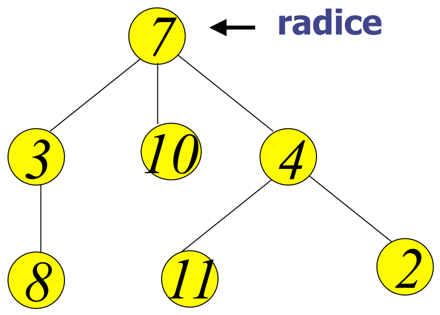


Esempio di grafo non diretto, non connesso e ciclico, G

G:
Nodi = {A,B,C,D,E,H,G,M,N}
ARCHI={{A,B},{A,C},{A,D},
{B,E},{C,E},{E,H},{G,M},{G,N}}

Alberi radicati

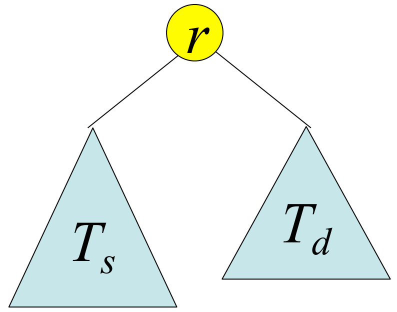
Un albero radicato è un albero in cui è individuato un vertice particolare, detto radice.

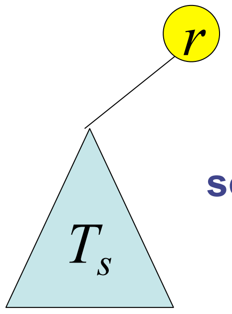


Nell'esempio 7 è la radice di tutto l'albero, 3,10 e 4 sono radici dei tre sottoalberi della radice, 7 è padre di 3,10 e 4, che sono i figli di 7. 7 è antenato di tutti i nodi, mentre 3 è antenato solo di 8
La sequenza di nodi 738 è il cammino (percorso) da 7 a 8, la cui lunghezza è il numero dei nodi che lo compongono meno 1.

Alberi binari

- Definizione ricorsiva:
- Un albero binario è una struttura che
  - è vuota o
  - è costituita da tre insiemi disgiunti di nodi: un nodo radice, un albero binario chiamato sotto albero sinistro e un albero binario chiamato sotto albero destro

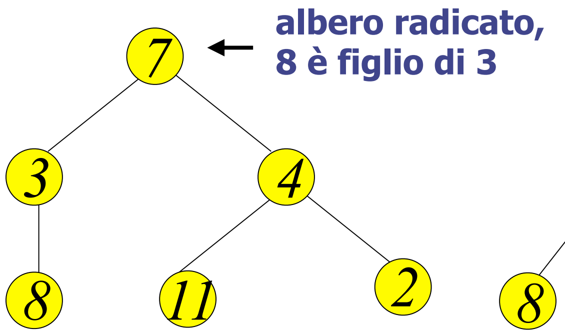


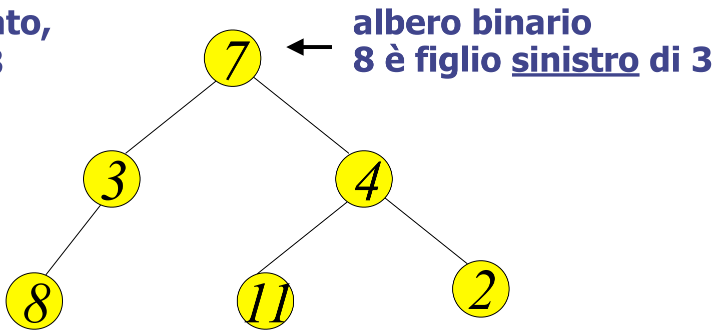


sottoalbero destro vuoto

Alberi radicati e binari

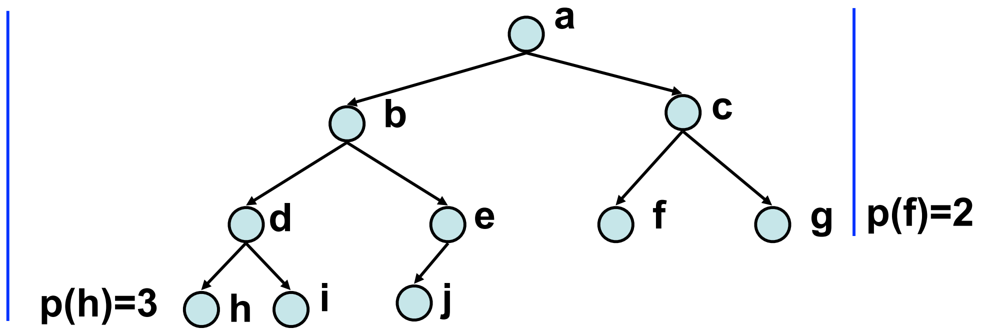
Un albero binario è diverso da un albero radicato, anche ordinato.





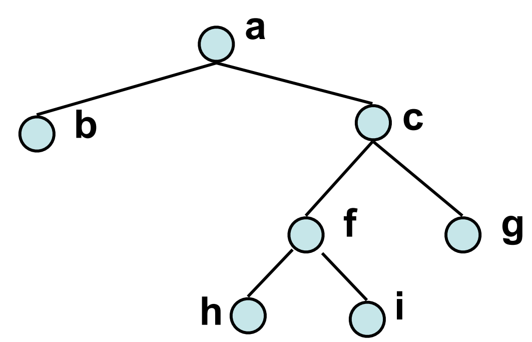
Profondità

La profondità di un nodo v è il numero dei suoi antenati, escludendo il nodo stesso, o equivalentemente la lunghezza del cammino da v alla radice.

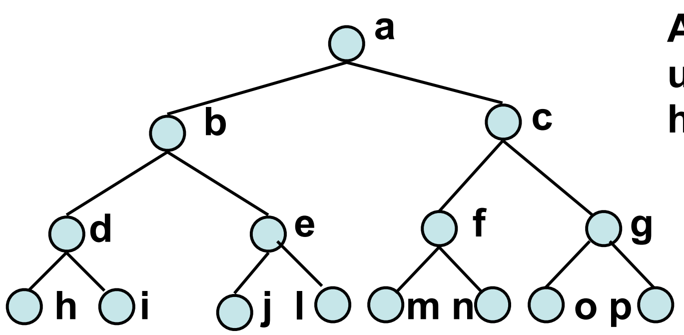


Def. Ric.: Sia t un albero binario e v un suo nodo,
se v è la radice profondità(v) = 0 e
se w è padre di v
profondità(v) = profondità(w)+1

Alberi binari: tipi



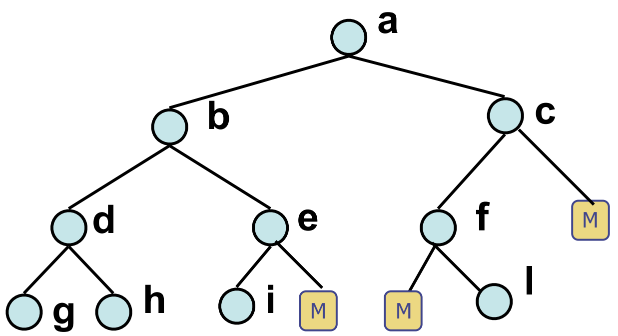
Albero binario pieno (full): ogni nodo ha due o zero figli.



Albero binario completo: un albero pieno in cui le foglie hanno la stessa profondità

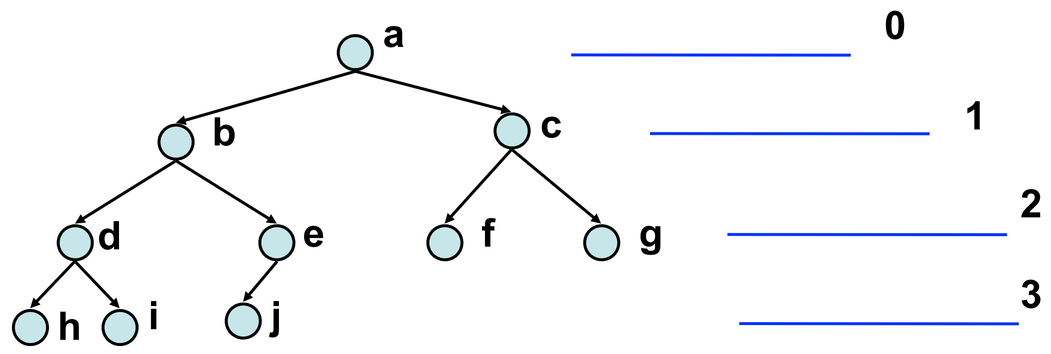
Alberi resi pieni

Ogni albero binario si può trasformare in uno pieno, aggiungendo un nodo-foglia fittizio, in modo che sia chiaro se un nodo è figlio sinistro o destro.

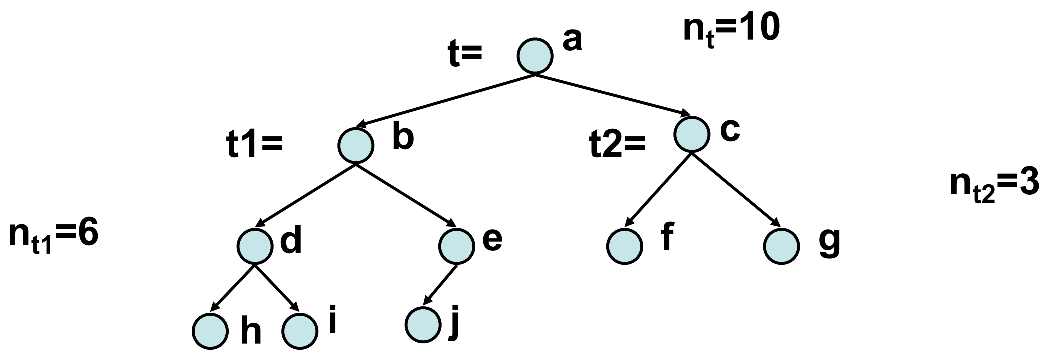


Livello

Un livello di un albero è costituito da nodi alla stessa profondità.



Numero dei nodi

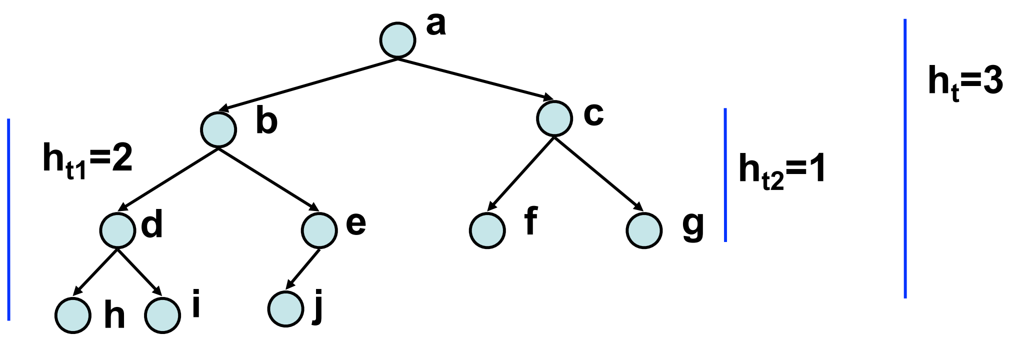


Def.Ric.: Sia t un albero binario,
se t è vuoto nodi(t) = 0 e
se t ha due sottoalberi t1 e t2

nodi(t) = nodi(t1) + nodi(t2) + 1

Altezza

L'altezza di un albero non vuoto è la massima profondità di una foglia

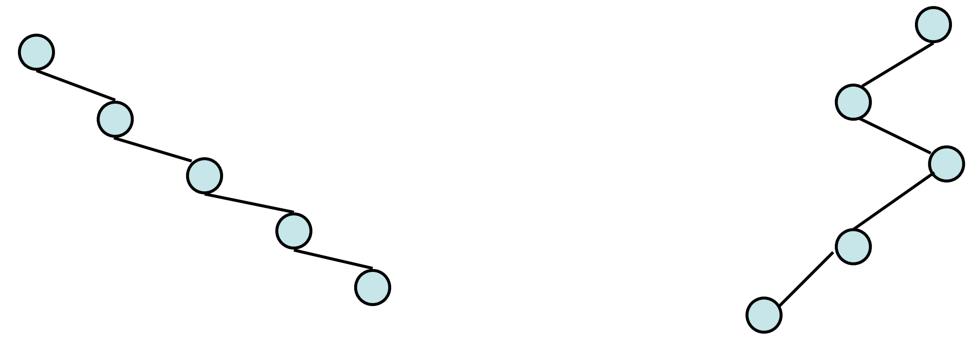


Def. Ric.: **Sia t un albero binario,**
se t è vuoto altezza(t) = -1 e
se t ha due sottoalberi t1 e t2

altezza(t) = max(altezza(t1), altezza(t2))+1

Alberi degeneri

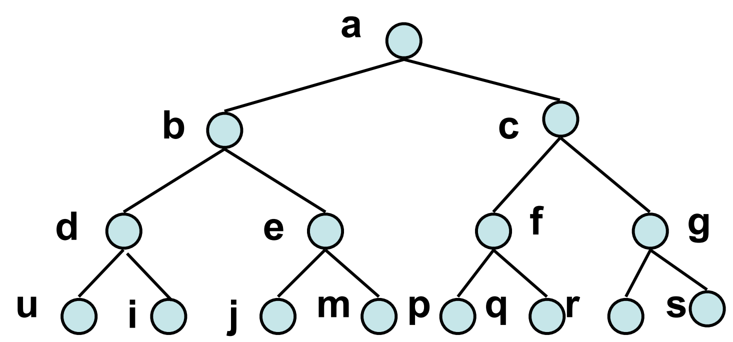
Un albero binario è detto completamente sbilanciato o degenere (degenerate) se ogni nodo ha un solo figlio



Sono alberi di altezza massima tra tutti quelli con lo stesso numero di nodi: se i nodi sono n, l'altezza h è n-1.
Infatti un albero binario avrà la massima altezza se ha il minor numero di nodi su ogni livello e il minimo numero di nodi su ogni livello è 1.

Possiamo allora dire che l'altezza di un qualunque albero binario t con n nodi è minore o uguale di n-1 e quindi minore di n

Alberi completi



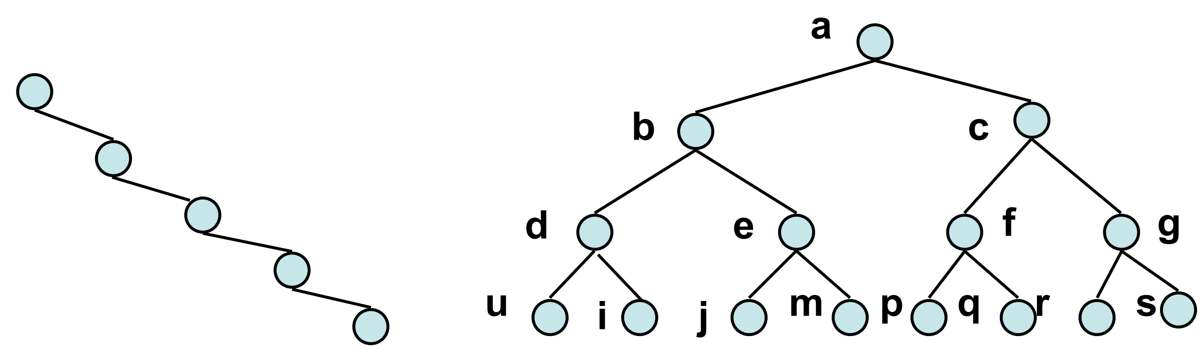
Un albero completo ha altezza minima tra tutti quelli con lo stesso numero di nodi, perchè ha il massimo numero di nodi su ogni livello, in particolare ha 2^i nodi nel livello i, per $0 \le i \le h$, dove h è la sua altezza.

Se t è un albero completo con N nodi e altezza h vale che

$$N = \sum_{i=0,\dots,i=h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

Quindi se t è un albero qualunque con n nodi e altezza h vale che $n \le 2^{h+1} - 1 \Leftrightarrow n < 2^{h+1} \Leftrightarrow \lg n < h+1 \Leftrightarrow \lfloor \lg n \rfloor < h+1 \Leftrightarrow \lfloor \lg n \rfloor \le h$

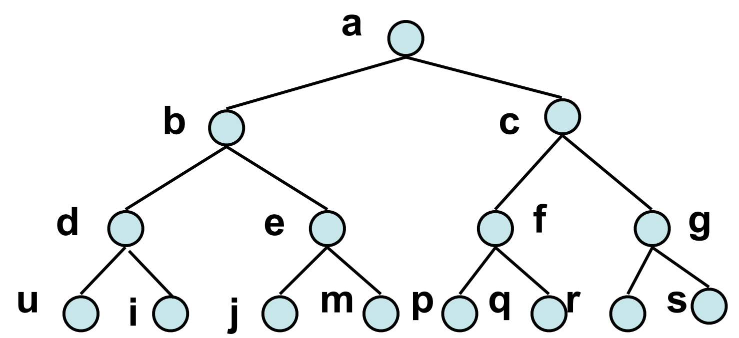
Altezza e numero di nodi



Concludendo se t è un albero qualunque con n nodi e altezza h possiamo dire che lg n ≤ h < n

Numero di foglie albero completo

L'albero completo di altezza h ha 2^h foglie, così come ha 2^i nodi in ogni livello i.
I nodi raddoppiano ogni volta che scendiamo da padre a figli, partendo dalla radice che da sola riempie il livello 0.

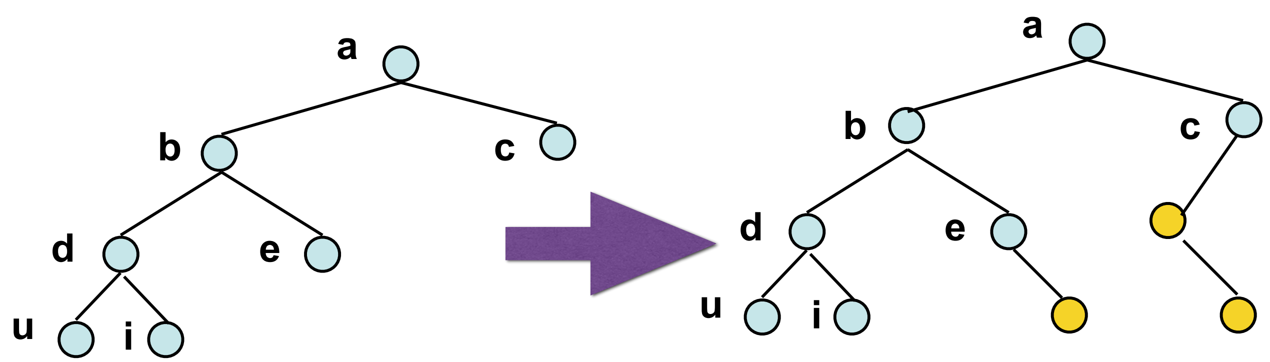


2^i è il numero massimo di nodi che possiamo avere in ogni livello i.

Per induzione su h.
Base h=0, t è l'albero con un solo nodo, nf(t)=1 e $1 \leq 2^0$.
Sia vero per tutti gli alberi perfetti di altezza minore di h-1.
Sia t un albero di altezza h, e siano t1 e t2 i suoi sottoalberi. Dette h1 e h2 le altezze dei sottoalberi si ha h1,h2 <h, quindi
Per h1 e h2 vale l'ipotesi induttiva: $nf(t1) \leq 2^{h1}$e $nf(t2) \leq 2^{h2}$.
$nf(t) = nf(t1)+nf(t2) \leq 2^{h1}+ 2^{h2} \leq 2(2^{h1+h2}) \leq 2^{h1+h2+1} \leq 2^h$

Numero di foglie albero qualunque

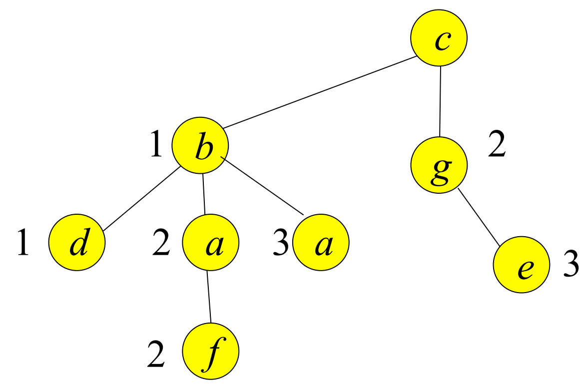
Un albero qualsiasi di altezza h ha al più 2^h foglie.
Questo si dimostra facilmente portando tutte le foglie nel livello h, allungando il cammino con un sotto albero degenere (l'operazione lascia invariato il numero delle foglie).
Ora le foglie sono tutte nel livello h, che ne ha al più 2^h.



Per induzione su h.
Base h=0, t è l'albero con un solo nodo, nf(t)=1 e $1 \leq 2^0$.
Sia vero per tutti gli alberi perfetti di altezza minore di h-1.
Sia t un albero di altezza h, e siano t1 e t2 i suoi sottoalberi. Dette h1 e h2 le altezze dei sottoalberi si ha h1,h2 <h, quindi
Per h1 e h2 vale l'ipotesi induttiva: $nf(t1) \leq 2^{h1}$ e $nf(t2) \leq 2^{h2}$.
$nf(t) = nf(t1)+nf(t2) \leq 2^{h1} + 2^{h2} \leq 2(2^{h1+h2}) \leq 2^{h1+h2+1} \leq 2^h$

Generalizzazione a k figli

Non è difficile generalizzare quanto visto al caso di k > 2 figli. Si tratta di alberi posizionali k-ari, in cui ogni nodo ha al più k figli numerati da sinistra.



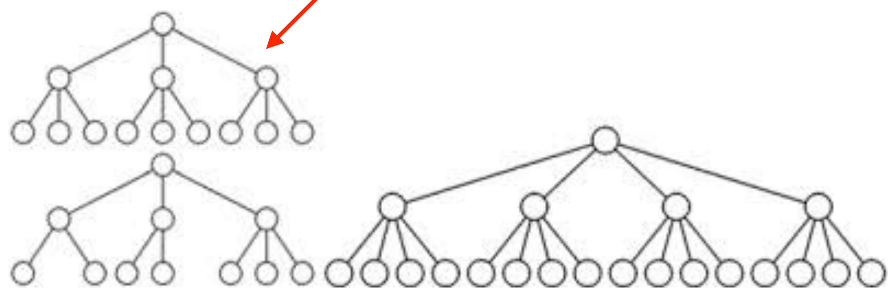
NNodi(t) = $(k^{h+1} - 1) / k-1$ se t è un k-ario completo di altezza h

Per induzione su h.
Base h=0, t è l'albero con un solo nodo, nf(t)=1 e $1 \leq 2^0$.

Prova sbagliata!
Sia vero per tutti gli alberi di altezza h-1.
Sia t un albero di altezza h-1, aggiungiamo due figli foglia a ogni foglia di t. L'albero ottenuto t' ha altezza h e un numero di foglie doppio rispetto a t, quindi
$nf(t') = 2nf(t) \leq 2 * 2^{h-1} = 2^h$
Ma non tutti gli alberi hanno un numero pari di foglie!!
Sia t un albero di altezza h, e siano t1 e t2 i suoi sottoalberi. Dette h1 e h2 le altezze dei sottoalberi si ha h1,h2 <h, quindi
Per h1 e h2 vale l'ipotesi induttiva: $nf(t1) \leq 2^{h1}$ e $nf(t2) \leq 2^{h2}$.
$nf(t) = nf(t1)+nf(t2) \leq 2^{h1}+ 2^{h2} \leq 2(2^{max(h1+h2)}) = 2^{max(h1+h2)+1}=2^h$

Esempi con 3 o 4 figli

Un albero (posizionale) ternario completo di altezza h ha 3^h foglie e $(3^{h+1} - 1)/2$ nodi.



Un albero (posizionale) quaternario completo di altezza h ha 4^h foglie e $(4^{h+1} - 1)/3$ nodi.

Per induzione su h.
Base h=0, t è l'albero con un solo nodo, nf(t)=1 e $1 \leq 2^0$.

Prova sbagliata!
Sia vero per tutti gli alberi di altezza h-1.
Sia t un albero di altezza h-1, aggiungiamo due figli foglia a ogni foglia di t. L'albero ottenuto t' ha altezza h e un numero di foglie doppio rispetto a t, quindi
$nf(t') = 2nf(t) \leq 2 * 2^{h-1} = 2^h$
Ma non tutti gli alberi hanno un numero pari di foglie!!
Sia t un albero di altezza h, e siano t1 e t2 i suoi sottoalberi. Dette h1 e h2 le altezze dei sottoalberi si ha h1,h2 <h, quindi
Per h1 e h2 vale l'ipotesi induttiva: $nf(t1) \leq 2^{h1}$ e $nf(t2) \leq 2^{h2}$.
$nf(t) = nf(t1)+nf(t2) \leq 2^{h1} + 2^{h2} \leq 2(2^{max(h1+h2)}) = 2^{max(h1+h2)+1} = 2^h$