Asintotica: esempi ed esercizi

docenti: T. Calamoneri, A. Monti
Sapienza Università di Roma

Esempio 1. Dimostrare o confutare che la funzione 4^n è in $O(2^n)$.

> 4^n NON è in $O(2^n)$, e la dimostrazione è per assurdo. Assumiamo 4^n in $O(2^n)$ allora esiste una costante c ed un valore n_0 per cui si ha $4^n \leq c2^n$ per $n \geq n_0$, questo significa che da un certo n in poi vale $2^n \leq c$ e questo è assurdo perché la funzione 2^n cresce e non può essere limitata da una costante c.

Esempio 2. Dimostrare o confutare che la funzione $(n+10)^3$ è in $\Theta(n^3)$.

1. $(n+10)^3$ **è** $O(n^3)$, infatti: per $n \geq 10$ si ha $(n+10)^3 \leq (2n)^3 = 8n^3$. Quindi basta prendere $n_0 = 10$ e $c = 8$.
2. $(n+10)^3$ **è** $\Omega(n^3)$, infatti: $n^3 < (n+10)^3$. Quindi basta prendere $n_0 = c = 1$.

Dai punti 1) e 2) segue che $(n+10)^3$ è $\Theta(n^3)$.

Esercizio 1. Dimostrare o confutare che

- la funzione 4^n è $O(2^{n \log n})$.
- $(n-50)^2$ è $\Theta(n^2)$
- le due classi $O(5^n)$ e $O(2^n)$ sono inconfrontabili.
- le due classi $\Omega(5^n)$ e $\Omega(2^n)$ sono inconfrontabili.
- le due classi $\Theta(5^n)$ e $\Theta(2^n)$ sono inconfrontabili.

Esempio 3. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} i$.

1. dimostrare che $S = \Theta(n^2)$.

   (a) $S = \sum_{i=1}^{n} i = \ldots + \lceil \frac{n}{2} \rceil + \ldots + n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq \frac{n^2}{4} = \Omega(n^2)$
   (b) $S = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \ldots + n \leq n + n + \ldots + n = n \cdot n = O(n^2)$

   da a) e b) segue $S = \Theta(n^2)$.

2. Dimostrare che : $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Sommiamo le seguenti due equazioni:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n & & \\
S & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
2S & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 & = & (n+1)n
\end{array}
$$

   da questo deduciamo che $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio 2. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} i^c$ dove c è una qualsiasi costante intera positiva.

Dimostrare che $S = \Theta(n^{c+1})$.

Esempio 4. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=0}^{n} 2^i$

1. dimostrare che $S = 2^{n+1} - 1$.

   Sottraiamo la seconda dalla prima delle due seguenti equazioni:

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
2S & = & & & 2 & + & 2^2 & + & \ldots & + & 2^n & + & 2^{n+1} & & \\
S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & & & & \\
\hline
S & = & -1 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 2^{n+1} & = & 2^{n+1} - 1 & &
\end{array}
$$

   da questo deduciamo che $S = 2^{n+1} - 1$.

2. dimostrare che $S = \Theta(2^n)$.

   La dimostrazione segue dal punto precedente in quanto $2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = \Theta(2^n)$

Esercizio 3. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=0}^{n} c^i$ dove c è una qualsiasi costante intera positiva diversa da 1.
Dimostrare che

1. $S = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$.

2. $S = \Theta(c^n)$ se $c > 1$ e $S = O(1)$ se $c < 1$.

Esempio 5. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} i2^i$.

1. Dimostrare che $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

   Sommiamo le seguenti due equazioni:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S & = & 2 & + & 2 \cdot 2^2 & + & 3 \cdot 2^3 & + & \dots & + & (n-1) \cdot 2^{(n-1)} & + & n2^n & & \\ 2S & = & & & 2^2 & + & 2 \cdot 2^3 & + & \dots & + & \dots & + & (n-1)2^n & + & n2^{n+1} \\ \hline S - 2S & = & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^n & - & n2^{n+1} & & \end{array}$$

   deduciamo dunque che

$$-S = \sum_{i=1}^{n} 2^i - n2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) - 1 - n2^{n+1}$$

   dove si usa il valore della somma geometrica calcolato nell'esercizio 4. Abbiamo quindi $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

2. Dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} i2^i = \Theta(n2^n)$.

   La dimostrazione segue dal punto precedente infatti $(n-1)2^{n+1} - 2 = \Theta(n2^n)$.

Esercizio 4. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} i \cdot c^i$ dove c è una qualsiasi costante maggiore di 1.

- Dimostrare che $S = \frac{nc^{n+1}}{c-1} - \frac{c^{n+1}-1}{(c-1)^2} + 1$.
- Dimostrare che $S = \Theta(nc^n)$.

Esempio 6. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1} \log_2 i$.
Dimostrare che $S = \Theta(n \log n)$.

Preliminarmente si osservi che $\sum_{i=1}^{n} \log_2 i = \log_2 \left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \log_2(n!)$ mentre dalla definizione di $n!$ si ha $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$.

1. $S = \log_2(n!) \leq \log_2 n^n = n \log_2 n$. Quindi $S = O(n \log n)$

2. $S = \log_2(n!) \geq \log_2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \log_2 \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \log_2 n - \frac{n}{2} =$
   $= \frac{n}{4} \log_2 n + \frac{n}{4} \log_2 n - \frac{n}{2} \geq \frac{n}{4} \log_2 n$
   dove l'ultima diseguaglianza vale per $n \geq n_0 = 4$.
   Quindi $S = \Omega(n \log n)$.

Da 1) e 2) segue $S = \Theta(n \log n)$.

Esercizio 5. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} \log_2^c i$ dove c è una qualsiasi costante maggiore di 1.
Dimostrare che $S = \Theta(n \log^c n)$.

Esempio 7. Si consideri la sommatoria $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
Dimostrare che $S = \Theta(\log n)$.
Non è nota una forma chiusa per questa somma (nota come somma armonica). Possiamo però ottenerne stime per difetto e per eccesso ricorrendo agli integrali.
In generale quando una somma può essere espressa come $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ *dove* $f(i)$ *è una funzione monotona continua non crescente allora possiamo approssimarla tramite integrali*

$$\int_{a}^{b+1} f(x)dx \leq \sum_{i=a}^{b} f(i) \leq \int_{a-1}^{b} f(x)dx$$

applicando il metodo al nostro caso abbiamo:

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.
   Quindi $S = \Omega(\log n)$

2. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x}dx = 1 + [\ln x]_1^{n} = 1 + \ln n - \ln 1 = 1 + \ln n$
   .
   Quindi $S = O(\log n)$

Da 1) e 2) deduciamo $S = \Theta(\log n)$. Più precisamente abbiamo:

$$\ln(n+1) < S < \ln n + 1.$$

Esercizio 6. Utilizzando le limitazioni offerte dagli integrali:

$$\int_{a-1}^{b} f(x)dx \leq \sum_{i=a}^{b} f(i) \leq \int_{a}^{b+1} f(x)dx$$

con $f(x)$ continua e crescente, dimostrare che:

- $\sum_{i=1}^{n} i^c = \Theta\left(n^{c+1}\right)$.
- $\sum_{i=1}^{n} c^i = \Theta\left(c^n\right)$.