

Corso di laurea in Informatica  
Introduzione agli Algoritmi  
Lezioni in modalità mista o a distanza

# Strutture dati fondamentali: Visite di Alberi

**Tiziana Calamoneri**



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

## Visite di Alberi (1)

Un'operazione basilare sugli alberi è l'accesso a tutti i suoi nodi, uno dopo l'altro, al fine di poter effettuare una specifica operazione (che dipende ovviamente dal problema posto) su ciascun nodo.

Tale operazione sulle liste si effettua con una semplice iterazione, ma sugli alberi la situazione è più complessa dato che la loro struttura è ben più articolata.

L'accesso progressivo a tutti i nodi di un albero si chiama ***visita dell'albero***.

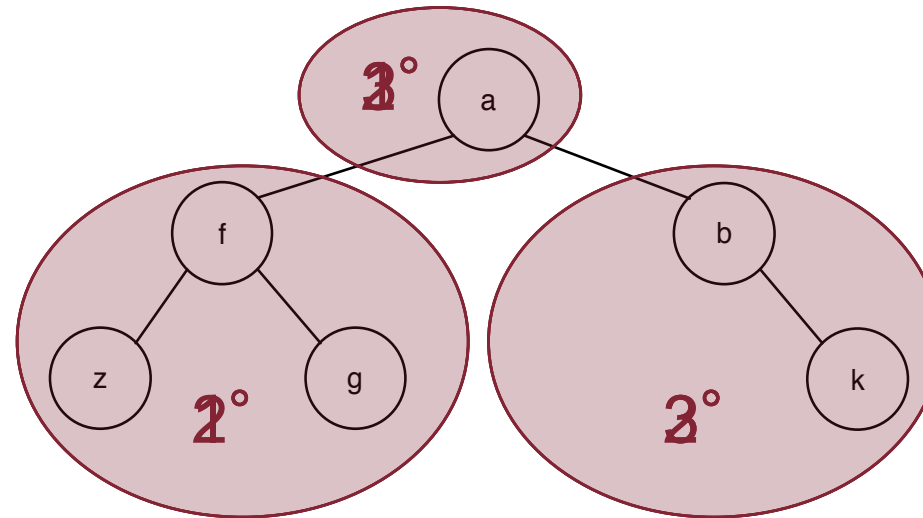
## Visite di Alberi (2)

Facendo riferimento all'ordine col quale si accede ai nodi dell'albero, è evidente che esiste più di una possibilità.

Nel caso degli alberi binari, nei quali i figli di ogni nodo (e quindi i sottoalberi) sono al massimo due, e volendo comportarsi nello stesso modo su tutti i nodi, abbiamo tre diverse visite:

- ***visita in preordine (preorder)***: il nodo è visitato prima di proseguire la visita nei suoi sottoalberi;
- ***visita inordine (inorder)***: il nodo è visitato dopo la visita del sottoalbero sinistro e prima di quella del sottoalbero destro;
- ***visita postordine (postorder)***: il nodo è visitato dopo entrambe le visite dei sottoalberi.

## Visite di Alberi (3)



- visita in preordine: **a f z g b k**
- visita in inordine: **z f g a b k**
- visita in postordine: **z g f k b a**

## Visite di Alberi (4)

Se l'albero è memorizzato tramite record e puntatori ed è quindi dato tramite il puntatore p alla sua radice:

```
def Visita_preordine (p):
```

```
    if (p ≠ None)
```

```
        accesso al nodo e operazioni conseguenti
```

inordine

```
        Visita_preordine (p->left)
```

```
        Visita_preordine (p->right)
```

postordine

```
    return
```

Le altre visite sono analoghe.

L'unica differenza fra i tre casi è la posizione della pseudo-istruzione relativa all'accesso al nodo per effettuare le operazioni desiderate.

## Visite di Alberi (5)

### Costo computazionale delle visite

E', ovviamente, lo stesso per tutte e tre.

Esso varia al variare della struttura dati utilizzata per memorizzare l'albero. Nel caso di memorizzazione tramite record e puntatori, detto  $k$  il numero di nodi del sottoalbero sinistro della radice, l'equazione di ricorrenza è:

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(1)$$

$$T(0) = \Theta(1)$$

Non siamo in grado di risolvere questa equazione con gli strumenti dati, quindi: metodo di sostituzione.

Facciamoci un'idea della possibile soluzione...

## Visite di Alberi (6)

### Costo computazionale delle visite – caso migliore

Si verifica quando l'albero è completo, poiché la suddivisione tra le due chiamate ricorsive è la più equa possibile.

In tal caso, se  $h$  è il numero dei suoi livelli, si ha  $n = 2^{h+1} - 1$  ed entrambi i sottoalberi di ogni nodo sono completi. L'equazione quindi diviene:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$$

che ricade nel caso 1 del teorema principale, ed ha quindi soluzione:

$$T(n) = \Theta(n^{\log 2}) = \Theta(n)$$

## Visite di Alberi (7)

### Costo computazionale delle visite – caso peggiore

Si verifica quando  $k = 0$  (oppure, simmetricamente, quando  $n - k - 1 = 0$ ), per il quale si ottiene:

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$$

che ha banalmente, ad esempio col metodo iterativo, la soluzione:

$$T(n) = n \Theta(1) = \Theta(n)$$



## Visite di Alberi (8)

### Costo computazionale delle visite – caso generale

Il costo computazionale nel caso generale è limitato inferiormente da quello del caso migliore, quindi è  $\Omega(n)$ , e superiormente da quello del caso peggiore, quindi è  $O(n)$ .

Di conseguenza, anch'esso è  $\Theta(n)$ .

Dimostriamolo formalmente, risolvendo l'equazione con il metodo di sostituzione.

## Visite di Alberi (9)

Costo computazionale delle visite – caso generale (segue)

Eliminiamo prima la notazione asintotica:

- $T(n) = T(k) + T(n-1-k) + c$
- $T(1) = d$

per due costanti positive  $c$  e  $d$  note.

Tentiamo la soluzione  $T(n) \leq an$ , dove  $a$  è una costante da determinare.

Passo base:  $d = T(1) \leq a$  vera sse  $a \geq d$

Passo induttivo:  $T(n) \leq ak + a(n-1-k) + c =$

$$= a(n-1) + c = an - a + c \leq an \text{ vera sse } \underline{a \geq c}$$

Abbiamo dimostrato che  $T(n) = O(n)$

Si dimostra analogamente che  $T(n) \geq bn$ , quindi che  $T(n) = \Omega(n)$

Ne segue che

$$T(n) = \Theta(n)$$

## Visite di Alberi (10)

Costo computazionale delle visite – caso generale (segue)

**Domanda:** avremmo potuto scrivere l'equazione di ricorrenza in termini di  $h$ ?

In altre parole, è giusto scrivere questo?

- $T(h) = 2T(h-1) + \Theta(1)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Questa equazione ha costo  $T(h) = \Theta(2^h)$  ma non siamo in grado di mettere in relazione esatta  $n$  ed  $h$  in un albero binario qualsiasi; sappiamo solo che  $h = O(n)$ , che porterebbe a  $T(n) = O(2^n)$ , certamente corretto ma inutile!

## Applicazioni delle visite (1)

Le visite sono estremamente utili per ispezionare l'albero e dedurne delle proprietà.

A seconda delle proprietà che si vuole esaminare può essere più utile una delle tre visite considerate.

## Applicazioni delle visite (2)

**Esempio:** conteggio del numero dei nodi.

```
def Calcola_n (p):  
    if (p ≠ None):  
        num_l = Calcola_n (p->left)  
        num_r = Calcola_n (p->right)  
        num = num_l + num_r + 1      #accesso al nodo  
        return num  
    return 0
```

**N.B.** segue la filosofia della visita in postordine!

Al posto delle 4 istruzioni nell'if possiamo scrivere:

```
return 1+Calcola_n(p->left)+Calcola_n(p->right)
```

## Applicazioni delle visite (3)

**Esempio:** ricerca in un albero.

```
def Cerca (p):  
    if (p ≠ None):  
        if p->info== k return TRUE  
        else:  
            if Cerca(p->left,k)==TRUE:  
                return TRUE  
            else: return Cerca(p->right,k)  
    return FALSE
```

N.B. segue la filosofia della visita in preordine!

***Esercizio proposto:*** modificare il codice in modo da restituire il puntatore al nodo che contiene la chiave *k* oppure *none* se la chiave *k* non è presente.

## Applicazioni delle visite (4)

**Esempio:** calcolo dell'altezza dell'albero (stabiliamo che un albero costituito di un singolo nodo ha altezza zero).

```
def Calcola_h (p):  
    if (p==None): return -1          #albero vuoto  
    if (p->left==None AND p->right==None): return 0  
    h = max{Calcola_h(p->left),Calcola_h(p->right)}  
    return h + 1
```

N.B. segue la filosofia della visita in postordine!

## Applicazioni delle visite (5)

**Esempio:** conteggio dei nodi presenti nel livello  $k$  (la radice è a livello 0).

```
def Conta_k (p; k, i: interi):  
    if (p == None): return 0           #albero vuoto  
    if (k==i): return 1  
    k_left = Conta_k(p->left, k, i+1)  
    k_right = Conta_k(p->right, k, i+1)  
    return k_left + k_right
```

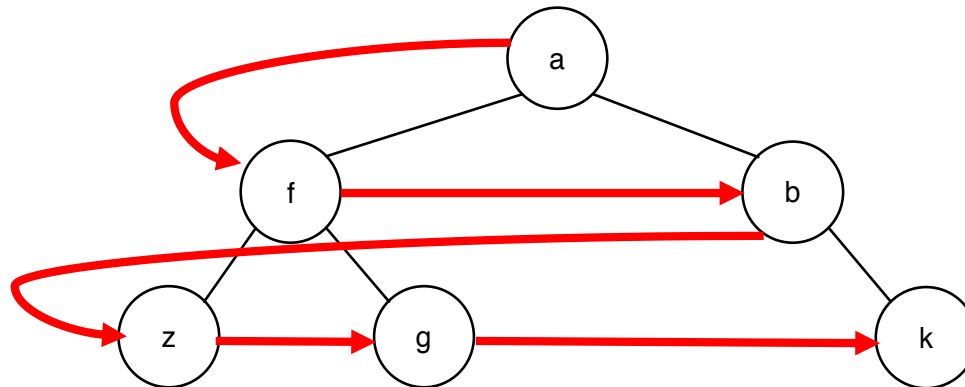
La chiamata iniziale nel main() sarà  $nk = \text{Conta\_k}(\text{radice}, k, 0)$

N.B. segue la filosofia della visita in postordine; il costo computazionale è  $\Theta(\text{numero di nodi che si trovano ad un livello } \leq k)$



## Visita per livelli (1)

E se volessimo accedere ai nodi per livelli, dalla radice in giù?



Nessuna delle visite ricorsive che abbiamo illustrato per gli alberi implementati mediante puntatori permette di farlo.

E' necessario utilizzare una coda d'appoggio, nella quale inserire opportunamente i nodi, estraendoli poi per visitarli. La medesima tecnica, con alcuni ulteriori accorgimenti, permetterà (come vedremo più avanti) di realizzare un importante tipo di visita su grafi.

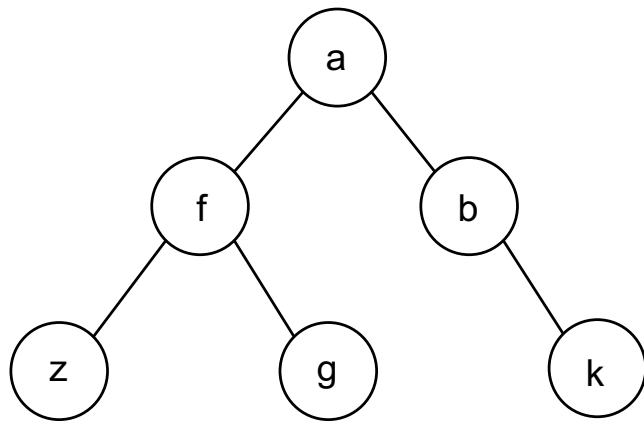
## Visita per livelli (2)

Per semplicità, supponiamo che l'implementazione della coda sia fatta in modo tale da inserire ed estrarre direttamente puntatori a nodi dell'albero. Si lascia come esercizio tale implementazione.

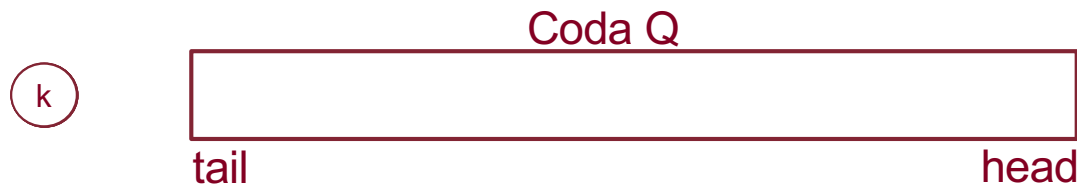
Vogliamo stampare le chiavi dei nodi visitandoli per livelli.

```
def Visita_perlivelli (r; head, tail):
    if (r==None): return
    Enqueue(head, tail, r)
    while (!CodaVuota(head))
        p = Dequeue(head, tail)
        print(p->key)
        if (p->left!=None): Enqueue(head, tail, p->left)
        if (p->right!=None): Enqueue(head, tail, p->right)
    return
```

## Visita per livelli (3) - esempio



```
def Visita_per_livelli (r; head, tail):  
    if (r==None): return  
    Enqueue(head, tail, r)  
    while (!CodaVuota(head))  
        p = Dequeue(head, tail)  
        print (p->key)  
        if (p->left!=None)  
            Enqueue(head, tail, p->left)  
        if (p->right!=None)  
            Enqueue(head, tail, p->right)  
    return
```



Stampa: a f b z g k

## Visita per livelli (4)

La caratteristica fondamentale di questa implementazione è che vengono inseriti nella coda tutti i nodi di livello  $i$  prima di inserire anche un solo nodo di livello  $(i + 1)$ .

Poiché l'ordine di estrazione è lo stesso (la coda è una struttura FIFO) e il lavoro sul nodo (la stampa) segue immediatamente l'estrazione, il risultato di scandire l'albero per livelli è raggiunto.

Il costo computazionale è  $\Theta(n)$  perché per ognuno degli  $n$  nodi si effettuano:

- una Enqueue, costo  $\Theta(1)$ ;
- una Dequeue, costo  $\Theta(1)$ ;
- un numero costante di operazioni elementari,  $\Theta(1)$ .

## Esercizio svolto (1)

**Esercizio.** Scrivere la visita in pre-ordine di un albero dato tramite vettore dei padri  $P$ , supponendo di avere una funzione `Trova_Figli(P, v, sx, dx)` che restituisce in  $sx$  e  $dx$  i figli di  $v$  (oppure zero se il figlio non c'è).

**Soluzione.**

```
def Pre_Order_Vett_Padri(P, ind_radice):  
    sx = 0; dx = 0;  
    #visita qui il nodo corrisp. a ind_radice;  
    Trova_Figli(P, ind_radice, sx, dx);  
    if sx≠0: Pre_Order_Vett_Padri(P, sx);  
    if dx≠0: Pre_Order_Vett_Padri(P, dx);
```

## Esercizio svolto (2)

Costo computazionale:

Osserviamo che `Trova_Figli(P, v, sx, dx)` ha un costo di  $\Theta(n)$ , indipendentemente da quale sia  $v$ , per cui  $T(n)$  non decresce spostandosi verso i sottoalberi.

Per questo non è possibile scrivere l'equazione di ricorrenza (o meglio, non è possibile scriverla semplicemente come sappiamo fare).

Procediamo quindi con questo ragionamento:

- per ogni nodo si fa lavoro  $\Theta(n)$ , da cui  $T(n) = \Theta(n^2)$ .

## Esercizio svolto (1)

**Esercizio.** Dato un albero binario non vuoto memorizzato tramite vettore dei padri, crearne uno identico memorizzato tramite notazione posizionale. Calcolare il costo computazionale.

### IDEA

- Prima di tutto identifichiamo la radice (unico elemento con None nell'array  $P$  - funzione `Trovaradice()`).
- Poi, per ogni nodo sistemato in posizione  $i$ , identifichiamo i suoi figli - funzione `Trova_figli()` - e li sistemiamo nelle posizioni  $2i$  e  $2i+1$  tramite la ricorsione.
- Supponiamo che la funzione `Trova_figli()` restituisca due valori, **left, right**, con gli indici di ciascuno dei due figli (oppure None per ogni figlio che non esiste). Si assume per convenzione che il primo indice trovato da `Trova_figli()` sia quello del figlio sinistro.

## Esercizio svolto (2)

- `Trova_radice(P)` effettua una scansione del vettore  $P$  dei padri e restituisce l'indice dell'unico elemento a None, che è quello relativo alla radice.
- `Trova_figli(P;i)` cerca le posizioni dei figli del nodo collocato in posizione  $i$ . Effettua una scansione dell'array  $P$  da sinistra a destra:
  - Il primo indice  $h$  trovato (se esiste) per cui  $P[h] = i$  viene assegnato a `left`; se non viene trovato si assegna None a `left`;
  - Il secondo indice  $k$  trovato (se esiste) per cui  $P[k] = i$  viene assegnato a `right`; se non viene trovato si assegna None a `right`;
- `SistemaNodo()`, che ora vedremo, è ricorsiva:
  - Copia un nodo dall'array delle chiavi (vettore dei padri, sottovettore  $B$ ) all'array posizionale ( $A$ );
  - Chiama ricorsivamente se stessa sui due figli del nodo appena sistemato.



## Esercizio svolto (3)

Nella funzione chiamante si avrà:

```
IndiceRadice = Trova_radice(P)
```

```
SistemaNodo(A, B, P, 1, Indiceradice)
```

```
def SistemaNodo (A, B, P; indA, indB) :  
    if (indA ≤ n) :  
        A[indA]=B[indB]  
        {left, right} = Trova_Figli(P, indB)  
        if (left≠None) : SistemaNodo(A, B, P, 2*indA-1, left)  
        if (right≠None) : SistemaNodo(A, B, P, 2*indA, right)  
    return
```

- Array A: array risultato, con l'albero nella notazione posizionale
- Array B: chiavi dei nodi nella memorizzazione con vettore dei padri
- Array P: padri dei nodi nella memorizzazione con vettore dei padri
- indA: indice che si muove sull'array A (memorizzazione posizionale)
- indB: indice che si muove sugli array B e P (memorizzazione con vettore dei padri)

## Esercizio svolto (4)

$P$  è il vettore dei padri in cui sono memorizzati gli indici dei padri;  
**ind** è l'indice del nodo di cui si vogliono trovare i figli.

```
def Trova_Figli(P; ind):
    num_figli= 0
    left=None
    right=None
    for i in range len(P):
        if (P[i]==ind)
            num_figli=num_figli+1
            if (num_figli == 1): left=i
                else: right=i
    return {left,right}
```

Costo computazionale:  $\Theta(n)$

N.B. Si può facilmente modificare questa funzione perché funzioni in  $O(n)$ .

## Esercizio svolto (5)

Il costo computazionale è dato dalla somma dei costi di `Trova_radice()` e `SistemaNodo()`.

1. `Trova_radice()` ha banalmente costo  $\Theta(n)$
2. `SistemaNodo()` è di fatto una visita, nella quale però il lavoro su ciascun nodo ha costo  $\Theta(n)$  perché bisogna sempre scandire l'intero array  $P$  per trovare i due figli di un nodo. Poiché la visita fa tale lavoro (sempre sull'intero array  $P$ ) per ciascun nodo, il suo costo è  $T(n) = \Theta(n^2)$

Quindi il costo computazionale è

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$$

Corso di laurea in Informatica  
Introduzione agli Algoritmi  
Lezioni in modalità mista o a distanza

Esercizi per casa



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Esercizi proposti

- Scrivere lo pseudocodice ITERATIVO della visita in preordine.
- Calcolare il costo computazionale delle visite quando l'albero venga memorizzato tramite rappresentazione posizionale (si può usare la funzione `Trova_Figli`).
- In quell'esercizio, se usassimo un array ausiliario in cui memorizzare in fase di pre-processing i figli di ciascun nodo, come diventerebbe lo pseudocodice? ed il costo computazionale?