Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Lezioni in modalità mista o a distanza

Esercizi sulle Equazioni di ricorrenza

Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Una parentesi: somme utili

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{i}} = \Theta(\log n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

da cui:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = \Theta(2^n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = O(1)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (1)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$T(n)=2T(n/2)+ \Theta(n)=2(2T(n/2^2)+ \Theta(n/2^1))+ \Theta(n)=$$

$$=2^2T(n/2^2)+2\, \Theta(n/2)+ \Theta(n)=$$

$$=2^2(2T(n/2^3)+ \Theta(n/2^2))+2\, \Theta(n)=2^3T(n/2^3)+3\, \Theta(n)=\ldots=$$

$$= 2^k\, T(n/2^k)+\sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = 2^kT(n/2^k)+k\, \Theta(n)=\ldots$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

…

$T(n)= 2^k T(n/2^k)+k\ \Theta(n)=\ldots$

…(finché $n/2^k=1$ cioè se e solo se $k=\log n$)…=

$=2^{\log n}\ T(1)+\log n\ \Theta(n)=$ (ricordando che $2^{\log n} = n = \Theta(n)$)

$= n\ \Theta(1)+\log n\ \Theta(n)= \Theta(n \log n).$

Dunque la soluzione tramite questo metodo è $\Theta(n \log n)$.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (3)

ESERCIZI DA FARE A CASA:

Risolvere con il metodo iterativo:

$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

e

$T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Notate come cambiano i conti al variare delle costanti moltiplicative

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (4)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n)=2T(n/2)+cn$ per qualche costante c>0

$T(1)=d$ per qualche costante d>0

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è:

$\boldsymbol{T(n) \geq kn \log n}$, dove k è una costante da determinare.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Passo base. $T(1) \geq 0$, che è sempre verificata.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$$T(n) \geq 2\ (k\ n/2 \log n/2) + cn = kn \log n/2 + cn =$$

$$= kn \log n - kn + cn \geq kn \log n$$

se e solo se $cn \geq kn$ cioè se e solo se $k \leq c$. Poiché un tale k è sempre possibile da trovare, ne concludiamo che

$$T(n)= \Omega(n \log n).$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Per quanto riguarda la maggiorazione, non possiamo usare $T(n) \leq k' n \log n$ perché in tal modo il passo base non è verificato. Tentiamo allora $\boldsymbol{T(n) \leq k' n \log n +h}$.

Passo base. $T(1)=d\leq h$ che è vera per opportuni valori di h.

Passo induttivo. Sostituendo l'ipotesi induttiva nell'equazione otteniamo:

$$T(n) \leq 2\,(k' n/2 \log n/2 +h) +cn = k' n \log n/2 +2h+cn=$$

$$= k'n\,(\log n-1)+2h+cn=k'n \log n+h-k'n+cn+h\leq k'n \log n+h$$

se e solo se $cn+h \leq k'n$.

Esercizio: Risolvere un’equazione di ricorrenza (7)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Anche in questo caso esistono opportuni valori di *h* e *k’,* fissato *c,* per cui la disuguaglianza è verificata.

Ne segue che:

$$T(n)=O(n \log n).$$

Mettendo insieme le due notazioni asintotiche trovate, e cioè $T(n)= \Omega(n \log n)$ e $T(n)=O(n \log n)$, si deduce che

$$\boldsymbol{T(n)= \Theta(n \log n)}.$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (8)

- T(n)=2T(n/2)+Θ(n)
- T(1)= Θ(1)

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 2$, $b = 2$
- $f(n) = \Theta(n)$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

Poiché $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ siamo nel **caso 2**, da cui:

$$T(n) = \Theta(n \log n).$$

Esercizio: Risolvere un’equazione di ricorrenza (9)

ESERCIZI DA FARE A CASA:

Risolvere con il principale:

$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

e

$T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

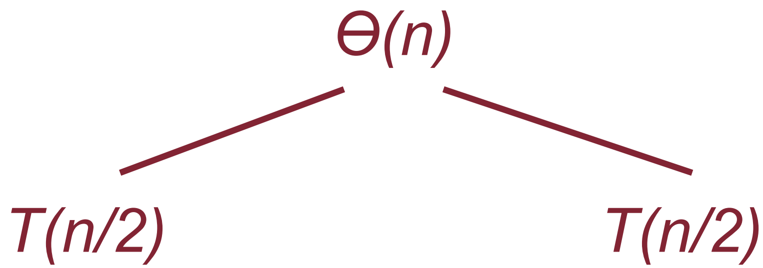
Notate come cambia il caso del teorema da applicare al variare di a e b

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (10)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo dell'albero:

La radice dell'albero dà un contributo di $\Theta(n)$ ed ha due figli, entrambi etichettati con $T(n/2)$, che quindi danno ciascuno contributo $\Theta(n/2)$ e così via. Schematizziamo dunque l'albero in questo modo:



Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (11)

segue metodo dell'albero per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Iterando il procedimento otteniamo questo albero, nel quale numeriamo i livelli da zero (radice) a *log n*:

$\Theta(n)$ — Livello *0*

$\Theta(n/2)$ $\Theta(n/2)$ — Livello *1*

$\Theta(n/2^2)$ $\Theta(n/2^2)$ $\Theta(n/2^2)$ $\Theta(n/2^2)$ — Livello 2

... ...

$T(1)=\Theta(1)$ … ... ... $T(1)=\Theta(1)$ — Liv. *log n*

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (12)

segue metodo dell'albero per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Il contributo della generica riga *i*-esima dell'albero è dato dal valore su ciascuno dei suoi nodi, pari a $\Theta(n/2^i)$, moltiplicato per il numero di nodi, cioè 2^i. Considerato che le righe sono *log n* +1(da 0 a *log n*), si ha:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} \Theta(\frac{n}{2^i})2^i = \sum_{i=0}^{\log n} \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (1)

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

<u>Metodo iterativo</u>:

$$T(n)=4T(n/2)+ \Theta(n)=4(4T(n/2^2)+ \Theta(n/2^1))+ \Theta(n)=$$

$$=4^2T(n/2^2)+4^1\, \Theta(n/2^1)+ \Theta(n)=$$

$$=4^2(4T(n/2^3)+ \Theta(n/2^2))+4^1\, \Theta(n/2^1)+ \Theta(n^1)=$$

$$=4^3T(n/2^3)+4^2\Theta(n/2^2) +4^1\, \Theta(n/2^1)+ \Theta(n^1)=\ldots=$$

$$= 4^k\, T(n/2^k)+\sum_{i=0}^{k-1} 4^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = \ldots$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

…

$T(n)=4^k\,T(n/2^k)+\sum_{i=0}^{k-1}4^i\Theta\left(\frac{n}{2^i}\right)=4^k\,T(n/2^k)+\sum_{i=0}^{k-1}2^i\Theta(n)=\ldots$

…(finché $n/2^k=1$ cioè se e solo se $k=\log n$)…=

$=4^{\log n}\,T(1)+\Theta(n)\sum_{i=0}^{\log n-1}2^i=$

(ricordando che $4^{\log n}=n^2$ e che $\sum_{i=0}^{\log n-1}2^i=\Theta(2^{\log n})=\Theta(n)$)

$=n^2\,\Theta(1)+\Theta(n)\,\Theta(n)=\Theta(n^2)$.

Dunque la soluzione tramite questo metodo è $\Theta(n^2)$.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (3)

- T(n)=4T(n/2)+Θ(n)
- T(1)= Θ(1)

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 4$, $b = 2$
- $n^{log_b a} = n^{log_2 4} = n^2$
- $f(n) = \Theta(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$ (ad es. per ε=0.5)

Siamo quindi nel **caso 1**, da cui:

$$T(n)= \Theta(n^2).$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (4)

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n)=4T(n/2)+cn$ per qualche costante c>0

$T(1)=d$ per qualche costante d>0

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è:

$\boldsymbol{T(n) \geq kn^2}$, dove k è una costante da determinare.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Passo base. $T(1) = d \geq k$, da cui deduciamo una prima condizione su k.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$T(n) \geq 4\, k\, (n/2)^2 + cn = 4kn^2/4 + cn = kn^2 + cn \geq kn^2$ sempre.

Ne concludiamo che

$$T(n) = \Omega(n^2).$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Per quanto riguarda la maggiorazione, tentiamo la soluzione $\boldsymbol{T(n) \leq k' n^2}$ dove *k'* è una costante da determinare.

Passo base. $T(1) = d \leq k'$, da cui deduciamo una prima condizione su *k'*.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$T(n) \leq 4k' (n/2)^2+cn = k' n^2+cn$ che non è mai $\leq kn^2$ perché c è una costante positiva.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (7)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Tentiamo allora $\boldsymbol{T(n) \leq k' n^2-hn}$.

Passo base. $T(1)=d\leq k'-h$ che è vera per certi valori di k' e h.

Passo induttivo. Sostituendo l'ipotesi induttiva nell'equazione otteniamo:

$T(n) \leq 4 (k' (n/2)^2-hn/2) +cn = k' n^2 -2hn+cn= k' n^2 -hn-hn+cn$

questa quantità è $\leq k'n^2-hn$ se e solo se $-hn+cn \leq 0$, cioè se e solo se $h \geq c$.

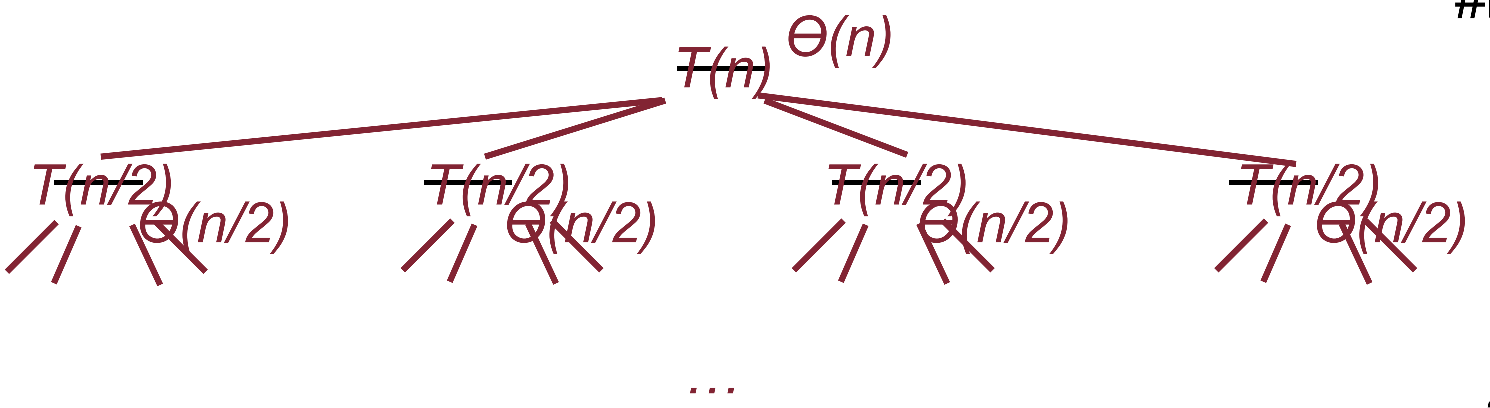
Ne concludiamo che $T(n)= O(n^2)$ e, unendo i due risultati:

$$T(n)= \Theta(n^2).$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (8)

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo dell'albero:



#nodi	contributo
1	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n/2)$
…	…
4^i	$\Theta(n/2^i)$
…	…

finché $n/2^i=1$ sse $i=\log n$

Sommo tutti i contributi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 4^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Theta(n) \sum_{i=0}^{\log n} 2^i = \Theta(n)\Theta\left(2^{\log n}\right) = \Theta(n^2)$$

Esercizio: Risolvere un’equazione di ricorrenza (1)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)= 2(2T(n/2^2)+\Theta(\left(\frac{n}{2}\right)^2)+\Theta(n^2) =$$

$$= 2(2(2T(n/2^3)+\Theta(\left(\frac{n}{4}\right)^2)+\Theta(\left(\frac{n}{2}\right)^2))+\Theta(n^2) = \ldots$$

$$= 2^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta\left(\left(\frac{n}{2^i}\right)^2\right) = 2^k T(n/2^k)+\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i}\Theta(n^2) =$$

$$= 2^k T(n/2^k)+ \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)= \Theta(1)$

…

Ci fermiamo quando $n/2^k=1$ *cioè* $k=\log n$, *ottenendo*

$$T(n) = 2^{\log n}\, T(1) + \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Ricordando che $2^{\log n} = n$ *e che* $\sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \Theta(1)$

Otteniamo $T(n) = \Theta(n) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$

Dunque la soluzione tramite questo metodo è $\boldsymbol{\Theta(n^2)}$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (3)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 2, b = 2$
- $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = n$
- $f(n) = \Theta(\mathrm{n}^2)=\Theta(n^2)= O\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ (ad es. per ε=1)

Siamo quindi nel **caso 3.** Poiché $a\left(\frac{n}{b}\right)^2 = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq \mathrm{cn}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{n}^2$ (ad es. per c = ½) si ha:

$$T(n)= \Theta(n^2).$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (4)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n) = 2T(n/2) + cn^2$ per qualche costante c > 0

$T(1) = d$ per qualche costante d > 0

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è:

$\boldsymbol{T(n) \leq kn^2}$, dove k è una costante da determinare.

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Passo base. $T(1) = d \leq k$, da cui deduciamo una prima condizione su *k.*

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$T(n) \leq 2\,k\,(n/2)^2 + cn^2 = kn^2/2 + cn^2 = (k/2+c)n^2 \leq kn^2$ se $c \leq k/2$.

Ne concludiamo che

$$T(n)= O(n^2)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)= \Theta(1)$

Proviamo ora a dimostrare per induzione che la soluzione è:

$\boldsymbol{T(n) \geq hn^2}$, dove h è una costante da determinare.

Passo base. $T(1) = d \geq h$, da cui deduciamo una prima condizione su h.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$T(n) \geq 2\, h\, (n/2)^2 + cn^2 = hn^2/2 + cn^2 = (h/2+c)n^2 \geq hn^2$

se $(h/2+c) \geq h$, ossia $h \leq 2c$.

Ne concludiamo che $\boldsymbol{T(n)= \Omega(n^2)}$

Dalle due deduciamo $\boldsymbol{T(n)= \Theta(n^2)}$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (7)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo dell'albero:

$\cancel{T(n)}$ $\Theta(n^2)$

$\cancel{T(n/2)}$ $\Theta((n/2)^2)$ $\qquad$ $\cancel{T(n/2)}$ $\Theta((n/2)^2)$

…

#nodi	contributo
2^0	$\Theta(n^2)$
2^1	$\Theta((n/2)^2)$
…	…
2^i.	$\Theta((n/2^i)^2)$
…	…

finché $n/2^i=1$ sse $i=\log n$

Sommo tutti i contributi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 2^i \Theta\left(\left(\frac{n}{2^i}\right)^2\right) = \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \Theta(n^2)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (1)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$
- $T(1)=\Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)=2(2T(n/2^2)+\Theta(\tfrac{n}{2}\log \tfrac{n}{2}))+\Theta(n \log n) =$$

$$=2^2T(\tfrac{n}{4}) + 2\,\Theta(\tfrac{n}{2}\log \tfrac{n}{2}) + \Theta(n \log n) =$$

$$= 2^2(2T(\tfrac{n}{2^3}) + \Theta(\tfrac{n}{2^2}\log \tfrac{n}{2^2})) + \Theta(n \log \tfrac{n}{2})) + \Theta(n \log n) =$$

$$\dots$$

$$= 2^k T(\tfrac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta\left(n \log \frac{n}{2^i}\right)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$ e $T(1)= \Theta(1)$

…

Ci fermiamo quando *k* = *log n* e otteniamo:

$$T(n) = 2^{\log n} T(1) + \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log n-1} n \log \frac{n}{2^i}\right) =$$

$$= n\Theta(1) + \Theta\left(n \sum_{i=0}^{\log n-1} \log n \; - \; n \sum_{i=0}^{\log n-1} \log 2^i\right) =$$

$$= \Theta(n) + \Theta(n \log^2 n - n \sum_{i=0}^{\log n-1} i\,) =$$

$$= \Theta(n) + \Theta(n \log^2 n - n \frac{\log n(\log n-1)}{2}) =$$

$$= \Theta(n) + \Theta(n \log^2 n - \frac{n}{2} \log^2 n + \frac{n}{2} \log n) = \boldsymbol{\Theta(n \log^2 n)}$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (3)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Impostiamo la dimensione del caso base a 2, per evitare di dover gestire il caso di log 1 = 0 ➟ $T(2)= \Theta(1)$.

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n) = 2T(n/2) + an \log n$ per qualche costante a > 0

$T(2) = b$ per qualche costante b > 0

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (4)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$ e $T(2)= \Theta(1)$

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è:

$\boldsymbol{T(n) \leq cn \log^2 n}$, dove *c* è una costante da determinare.

Passo base. $T(2) = b \leq c*2*1$, vera per $c \geq b/2$.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$T(n) \leq 2c \frac{n}{2} \log^2 \frac{n}{2} + an \log n = cn(\log n - 1)^2 + an \log n =$

$= cn(\log^2 n - 2 \log n + 1) + an \log n =$

$= cn \log^2 n - 2cn \log n + cn + an \log n \leq$

$\leq cn \log^2 n - cn \log n + an \log n$ (perché $cn \log n \geq cn$)

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (5)

segue metodo di sostituzione per T(n)=2T(n/2)+Θ(n log n) e T(2)= Θ(1)

$$cn\, log^2 n - cn\log n + an\log n \le cn\, log^2 n \text{ sse } c \ge a.$$

Concludiamo che

$$\boldsymbol{T(n) = O(n\, log^2 n)}$$

Si lascia per esercizio dimostrare che $T(n) = \Omega(n\, log^2 n)$.

Esercizio: Risolvere un’equazione di ricorrenza (1)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$
- $T(1)=\Theta(1)$

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

$a = 2$, $b = 2$

$f(n)= \Theta(n/\log n)$

$log_a b=1$

$n^{log_b a}$ = n è asintoticamente più grande di $f(n)$, ma non polinomialmente. Di conseguenza **non** possiamo applicare il metodo del teorema principale.

Esercizio: Risolvere un’equazione di ricorrenza (2)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$
- $T(1)=\Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)=2(2T(n/2^2)+\Theta(\tfrac{n}{2}/\log\tfrac{n}{2}))+\Theta(n/\log n)=$$

$$=2^2T(\tfrac{n}{2^2})+2\,\Theta(\tfrac{n}{2}/\log\tfrac{n}{2})+\Theta(n/\log n)=$$

$$=2^2(2T(\tfrac{n}{2^3})+\Theta(\tfrac{n}{2^2}/\log\tfrac{n}{2^2}))+\Theta(n/\log\tfrac{n}{2}))+\Theta(n/\log n)=$$

$$\dots$$

$$=2^kT(\tfrac{n}{2^k})+\sum_{i=0}^{k-1}\Theta\left(n/\log\frac{n}{2^i}\right)$$

Esercizio: Risolvere un'equazione di ricorrenza (3)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

…

Ci fermiamo quando $k = \log n$ e otteniamo:

$$T(n) = 2^{\log n} T(1) + \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log n - 1} n/\log \frac{n}{2^i}\right) =$$

$$= n\Theta(1) + \Theta\left(n \sum_{i=0}^{\log n - 1} 1/(\log n - i)\right) =$$

$$= n\Theta(1) + \Theta\left(n \sum_{j=1}^{\log n} 1/j\right) = \quad \text{(usiamo } \sum_{j=1}^{n} 1/j = \Theta(\log n)\text{)}$$

$$= \Theta(n) + \Theta(n)\,\Theta(\log \log n) = \boldsymbol{\Theta(n \log \log n)}$$

Risolvere per esercizio con gli altri metodi

Corso di laurea in Matematica
Insegnamento di Informatica generale
Lezioni a distanza

Esercizi per casa

Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esercizi (1)

Fare tutti gli esercizi lasciati a casa durante questa lezione:

- Risolvere con il metodo iterativo e con il metodo principale:

  $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

  e

  $T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$
- Data l'equazione:

  $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$

  $T(1)= \Theta(1)$

  Dimostrare per induzione che $T(n)= \Omega(n \log^2 n)$.
- Risolvere l'equazione $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$ e $T(1)= \Theta(1)$ con il metodo di sostituzione e dell'albero.

Esercizi (2)

- Calcolare le equazioni di ricorrenza associate ai seguenti algoritmi e risolverle con tutti i metodi possibili:

```
funzione Palindromo_Ric (A: vettore; in,fi: intero)
  if fi – in ≤ 1 return TRUE
  if A[in] = A[fi] return FALSE
  return Palindromo_Ric(A; in+1, fi-1)

Funzione Test (n: intero)
  k ← 0
  for i = 1 to n do
     k ← k + 1
  if n ≤ 1 return k
     else return (Test(n DIV 2)+Test(n DIV 4))
```