Esercizio con idea di soluzione (1)

(dal compito d'esame del 18/2/2021)

Sia dato un array A di interi e due valori a e b con a ≤ b, vogliamo sapere quanti elementi di A sono compresi nell'intervallo chiuso [a, b].

- Si progetti un algoritmo per risolvere tale problema su qualsiasi array A.
- Si progetti un algoritmo più efficiente del precedente assumendo che A sia già ordinato e che contenga solo valori distinti.

Per ciascun algoritmo si descriva a parole l'idea, si scriva lo pseudocodice e si analizzi il tempo di esecuzione asintotica

Esercizio con idea di soluzione (2)

Prima parte (array disordinato con possibili ripetizioni)

Scorro l'array e conto gli elementi inclusi in [a,b]:

```
Conta_in_Intervallo (A, a,b)
cont = 0;
for i in range len(A):
   if a ≤ A[i] ≤ b
      cont++;
return cont
```

Costo: $\Theta(n)$

Esercizio con idea di soluzione (3)

Seconda parte (array ordinato senza ripetizioni)

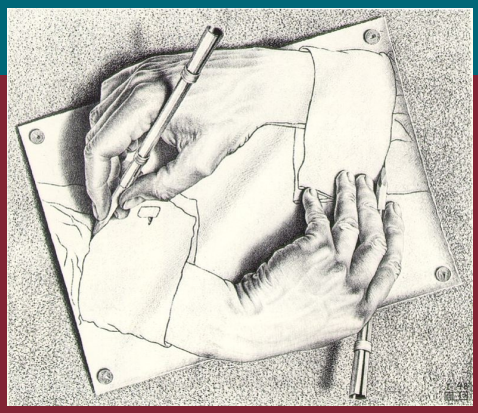
Cerco a e b nell'array con la ricerca binaria. Serve una piccola modifica nel caso questi due valori non siano nell'array, : se l'elemento cercato non c'è, invece di ritornare -1 ritorno l'indice m.

```
Conta_in_Intervallo_Ordinato (A, a,b)
ind_a = 0; ind_b = 0;
ind_a = Ricerca_binaria_modificata(A,a);
if A[ind_a]<a ind_a++;
ind_b = Ricerca_binaria_modificata(A,b);
if A[ind_b]>b ind_b++
return ind_b-ind_a+1
```

Costo: O(log n)

Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
A.A. 2024/25

La ricorsione



Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Ricerca binaria ricorsiva

Consideriamo una diversa formulazione dell'algoritmo di ricerca binaria, nella quale sono volutamente tralasciati i dettagli per catturarne l'essenza:

```
Ricerca_binaria (A, v)
   se A è vuoto restituisci -1
   ispeziona l'elemento A[centrale]
   se esso è uguale a v
      restituisci il suo indice
   se v < A[centrale]
      esegui Ricerca_binaria (metà sinistra di A, v)
   se v > A[centrale]
      esegui Ricerca_binaria (metà destra di A, v)
```


Ricerca binaria ricorsiva

L'aspetto cruciale di questa formulazione risiede nel fatto che l'algoritmo risolve il problema "riapplicando" se stesso su un sottoproblema (una delle due metà dell'array).

Questa tecnica si chiama **ricorsione**.

```
Ricerca_binaria (A, v)
   se A è vuoto restituisci -1
   ispeziona l'elemento A[centrale]
   se esso è uguale a v
      restituisci il suo indice
   se v < A[centrale]
      esegui Ricerca_binaria (metà sinistra di A, v)
   se v > A[centrale]
      esegui Ricerca_binaria (metà destra di A, v)
```

Funzioni matematiche ricorsive

Una funzione matematica è detta ricorsiva quando la sua definizione è espressa in termini di se stessa.

Esempio: n! = n*(n – 1)! Se n > 0
O! = 1

prima riga: meccanismo di calcolo ricorsivo

seconda riga: caso base

💡una funzione matematica ricorsiva deve sempre avere un caso base!

Algoritmi ricorsivi (1)

Nel campo degli algoritmi vi è un concetto del tutto analogo, quello degli algoritmi ricorsivi: un algoritmo è detto ricorsivo quando è espresso in termini di se stesso.

Algoritmi ricorsivi (2)

Un algoritmo ricorsivo ha sempre queste proprietà:

- la soluzione del problema complessivo è costruita risolvendo (ricorsivamente) uno o più sottoproblemi di dimensione minore e combinando poi queste soluzioni;
- la successione dei sottoproblemi, che sono sempre più piccoli, deve sempre convergere ad un sottoproblema che costituisca un caso base (detto anche condizione di terminazione), in cui la ricorsione termina.

Algoritmi ricorsivi (3)

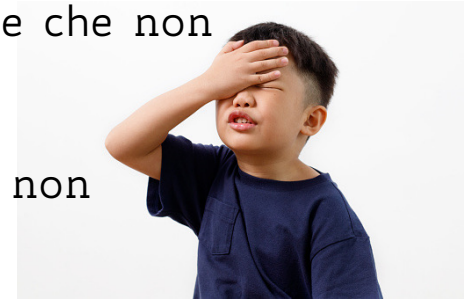
Esempio: Calcolo del fattoriale di un intero dato n.

```
def Fattoriale_Iter (n): // n: intero non negativo
      fatt = 1
      for i in range(1, n+1):
         fatt = fatt*i
      return fatt


def Fattoriale_Ric (n): // n : intero non negativo
   if (n == 0) return 1
      return n*Fattoriale_Ric (n - 1)
```

Algoritmi ricorsivi (4)

- Se una funzione ricorsiva non ha un caso base, la sua esecuzione genererà una catena illimitata di chiamate ricorsive che non terminerà mai



💡 Accertiamoci che il caso base non possa essere mai "saltato"

- Nulla vieta di prevedere più di un caso base, basterà assicurarsi che uno tra i casi base sia sempre e comunque incontrato.

Algoritmi ricorsivi (5)

Esempio: algoritmo ricorsivo per la ricerca sequenziale su n elementi:

- ispezioniamo l'n-esimo elemento;
- se non è l'elemento cercato risolviamo il problema ricorsivamente sui primi $(n - 1)$ elementi.

```
def Ricerca_seq_ric(A, v, n=len(A)-1):
    if (A[n]==v): return n
    if (n==0) return -1
        else return Ricerca_seq_ric(A, v, n - 1)
```

Algoritmi ricorsivi (6)

Esempio: algoritmo ricorsivo per la ricerca binaria su *n* elementi:

- ispezioniamo l'elemento centrale;
- se non è l'elemento cercato risolviamo il problema ricorsivamente su una sola metà dell'array.

```
def Ricerca_bin_ric (A, v, i_min=0, i_max=len(A)):
    if (i_min > i_max): return -1
    m =(i_min + i_max)//2
    if (A[m]==v): return m
    elif (A[m] > v):
        return Ricerca_bin_ric (A, v, i_min, m - 1)
    else:
        return Ricerca_bin_ric (A, v, m + 1, i_max)
```


Algoritmi ricorsivi (7)

Nella ric. bin. ogni nuova chiamata ricorsiva riceve un sotto-problema da risolvere la cui dimensione è circa la metà di quello originario quindi, come nella versione iterativa, si giunge molto rapidamente al caso base.

Da ciò deriva un costo computazionale di

$$O(\log n)$$

nel caso peggiore come per la ricerca binaria iterativa.

[Da dimostrare poi...]

La ricorsione (1)

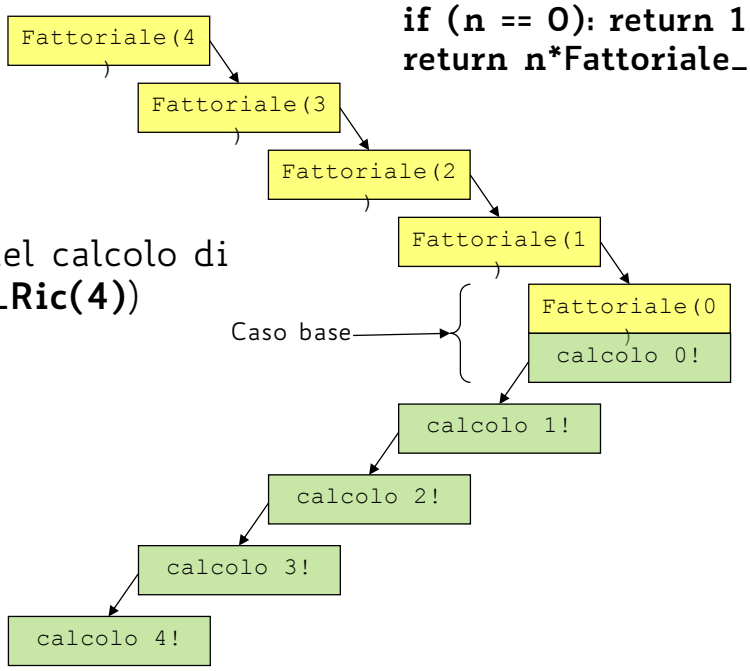
Ripassiamo come si sviluppa il procedimento di calcolo effettivo di una funzione ricorsiva sull'esempio del fattoriale:

```
def Fattoriale_Ric (n)
    if (n == 0): return 1
    return n*Fattoriale_Ric (n - 1)
```


La ricorsione (2)

```
def Fattoriale_Ric (n)
    if (n == 0): return 1
    return n*Fattoriale_Ric (n - 1)
```

(sviluppo del calcolo di **Fattoriale_Ric(4)**)



La ricorsione (3)

qualsiasi problema risolvibile con un algoritmo ricorsivo può essere risolto anche con un algoritmo iterativo.

Cosa usare?

meglio ricorsivo quando la formulazione del problema è inerentemente ricorsiva, mentre la soluzione iterativa è molto più complicata o addirittura non evidente

meglio iterativo quando:

- esiste una soluzione iterativa altrettanto semplice e chiara;
- l'efficienza è un requisito primario

La ricorsione (4)

Infatti:

ogni funzione, ricorsiva o no, richiede per la sua esecuzione una certa quantità di memoria, per:

- caricare in memoria il suo codice;
- passare i parametri;
- memorizzare le sue variabili locali.

Le funzioni ricorsive in generale hanno maggiori esigenze in termini di memoria, rispetto alle funzioni iterative.

La ricorsione (5)

⚠ Una funzione ricorsiva mal progettata, (ad es. senza la condizione di terminazione) esaurisce con estrema rapidità la memoria disponibile con la conseguente inevitabile terminazione forzata dell'esecuzione.

La ricorsione (6)

Esempio: calcolo dell'*n*-esimo numero di Fibonacci

Definizione dei numeri di Fibonacci:

- F(0) = 0
- F(1) = 1
- F(i) = F(i – 1) + F(i – 2) se i > 1

Leonardo Fibonacci
(1170-1250)

Esiste una formula chiusa per il calcolo (formula di Binet), che però introduce errori numerici dovuti agli inevitabili arrotondamenti causati dai calcoli in virgola mobile:

$$F(n) = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\Phi)^n}{\sqrt{5}} \quad \text{con } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

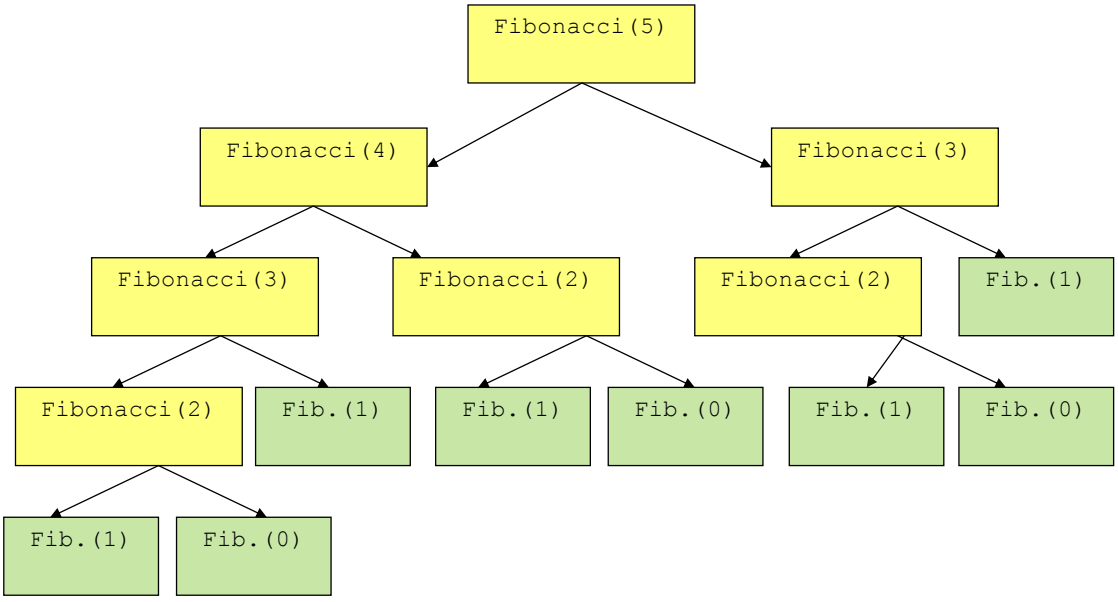
La ricorsione (7)

… quindi impostiamo il calcolo mediante la seguente funzione ricorsiva:

```
def Fibonacci (n):
    if (n <=1): return n
    return (Fibonacci(n - 1) + (Fibonacci(n - 2))
```

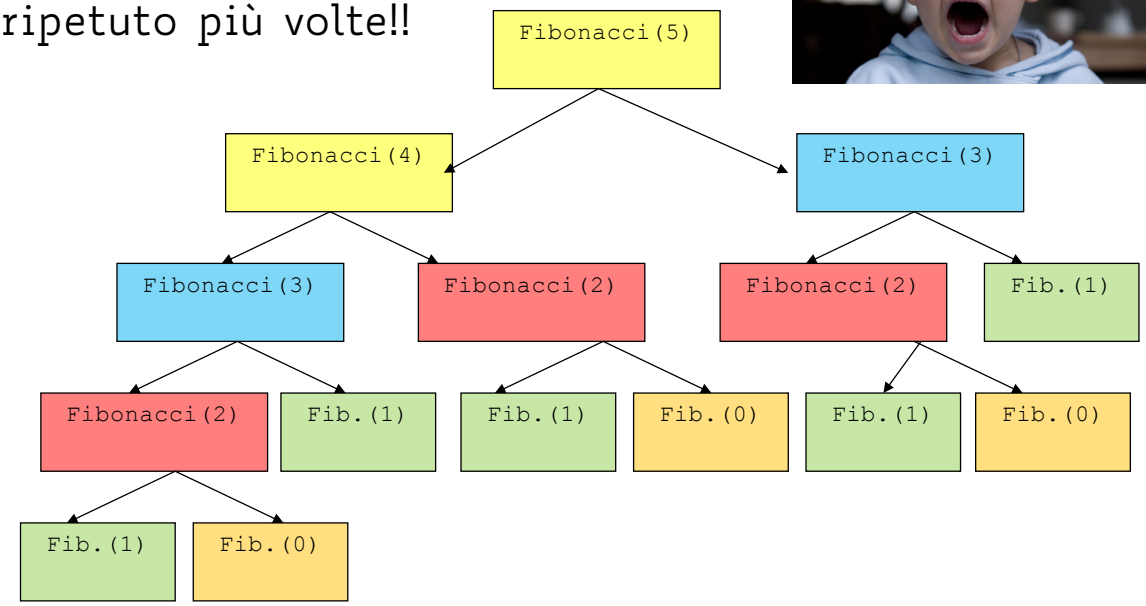
⚠ nel corpo della funzione, ci sono due chiamate ricorsive, non una sola come nel caso della ricerca binaria. Questo si riflette in una più complessa articolazione delle chiamate di funzione:

La ricorsione (8)



La ricorsione (9)

Oss. 1: uno stesso calcolo viene ripetuto più volte!!



La ricorsione (10)

Oss. 2: L'occupazione dello spazio di memoria, legata alle chiamate di funzione, è molto alta:

- Il numero totale delle chiamate effettuate cresce molto velocemente con n.
- Quando si arriva a ciascun caso base vi è una catena di chiamate "aperte" lungo il percorso che va dalla chiamata iniziale al caso base.

Oss. 3: Per risolvere un problema di dimensione n si devono risolvere due sottoproblemi di dimensione ben poco inferiore (rispettivamente, n-1 ed n-2).

La ricorsione (11)

La versione iterativa della funzione per il calcolo del numero di Fibonacci:

```
def Fibonacci_iter(n):
   if (n <= 1): return n
      fib_prec_prec = 0
      fib_prec = 1
      for i i in range(2,n+1):
          fib_prec_prec, fib_prec= + fib_prec,
                                fib_prec_prec + fib_prec
   return fib_prec
```

ha costo in tempo pari a Θ(n) ed in spazio pari a Θ(1)

La ricorsione (12)

Qual è il costo computazionale della versione ricorsiva?

```
Funzione Fib (n)
   if (n<=1))                          Θ(1)
      return n                         Θ(1)
      return(Fib (n- 1)+(Fib (n- 2))   T(n-1)+T(n-2)
```

Otteniamo un costo T(n)=Θ(1)+T(n-1)+T(n-2) che è simile alla formula che definisce i numeri di Fibonacci, per cui prevediamo sia un costo esponenziale. Ma come lo dimostriamo?

Con le equazioni di ricorrenza (in seguito)

La ricorsione – esercizio 1

Dati in input *n* e *k* interi, calcolare la potenza *k*-esima di n

possiamo basarci sul fatto che $n^k=n \cdot n^{k-1}$ ed $n^0=1$.

```
def Enne_alla_Kappa (n, k)
   if (k=0): return 1
   return n*Enne_alla_Kappa (n, k-1)
```

Costo:

Se k=0: T(n,k)=Θ(1)

Se k>0: T(n,k)=Θ(1)+T(n,k-1)

n è un parametro inutile per il costo computaz.

La ricorsione – esercizio 2

Dato in input un array di *n* interi, calcolare la somma dei suoi elementi.

la somma è pari al valore di un elemento più la somma calcolata ricorsivamente sul resto dell'array

```
def SommaArray (A, ult_ind=len(A)-1)
   if (ult_ind==0):
      return A[ult_ind]
   return (A[ult_ind] + SommaArray(A, ult_ind-1))
```

Costo:

Se n=1: T(n)=Θ(1)

Se n>1: T(n)=Θ(1)+T(n-1)

OSSERVAZIONE: Non è lo stesso eliminare l'elemento più a destra e quello più a sinistra...

La ricorsione – esercizio 3

Dato in input un array di n interi, trovare il minimo.

il minimo è pari al minore fra il valore di un elemento e il minimo trovato ricorsivamente sul resto dell'array

```
def MinArray (A, ult_ind=len(A)-1)
   if (ult_ind==0):
      return A[ult_ind]
   return min(A[ult_ind],MinArray(A, ult_ind-1))
```

Costo:

Se n=1: $T(n)=\Theta(1)$

Se n>1: $T(n)=\Theta(1)+T(n-1)$

La ricorsione – esercizio 4 (1)

Dato in input un array di *n* interi, verificare se è palindromo.

Esempio di array palindromo:

1	5	4	8	4	5	1

un array è palindromo se i suoi estremi sono uguali e il resto dell'array è anch'esso palindromo.

Nota: se *n* è dispari c'è un elemento centrale, altrimenti no; questa differenza va gestita.

La ricorsione – esercizio 4 (2)

```
def Palin (A, i_min=0, i_max=len(A)-1)
   if (i_max <= i_min):                    <-Caso base
      return true
   if (A[i_min] ≠ A[i_max]):
      return false
   return Palin(A, i_min+1,i_max-1)
```

💡 dim dell'input n=len(A)=i_max - i_min + 1

Costo:

Se n≤1: T(n)=Θ(1)

Se n>1: T(n)=Θ(1)+T(n-2)

La ricorsione – esercizio 5

Dato in input un array di n interi, stampare le chiavi dall'ultima alla prima, ossia nell'ordine:

A[n-1] A[n-2] A[n-3] … A[2] A[1] A[0]

💡 stampiamo l'ultima chiave e chiamiamo ricorsivamente la funzione sul resto dell'array, gestendo opportunamente un secondo parametro.

```
def StampaArray (A, ind_ult: len(A)-1)
   stampa (A[ind_ult])
   if (ind_ult > 0)
      StampaArray (A, ind_ult-1))
```

Costo: Se n=1: T(n)=Θ(1)

Se n>1: T(n)=Θ(1)+T(n-1)

La ricorsione – esercizio 6

E se invece vogliamo stampare le chiavi dalla prima all'ultima?

dobbiamo stampare durante la risalita dalle chiamate ricorsive, dopo aver incontrato il caso base per n = 1. Basta scambiare l'ordine della stampa rispetto alla chiamata ricorsiva:

```
def StampaArray_2 (A, ui: len(A)-1)
   if (ui > 0):
      StampaArray(A, ui-1))
   stampa (A[ui])
```

Costo: Se n=1: $T(n)=\Theta(1)$

Se n>1: $T(n)=\Theta(1)+T(n-1)$

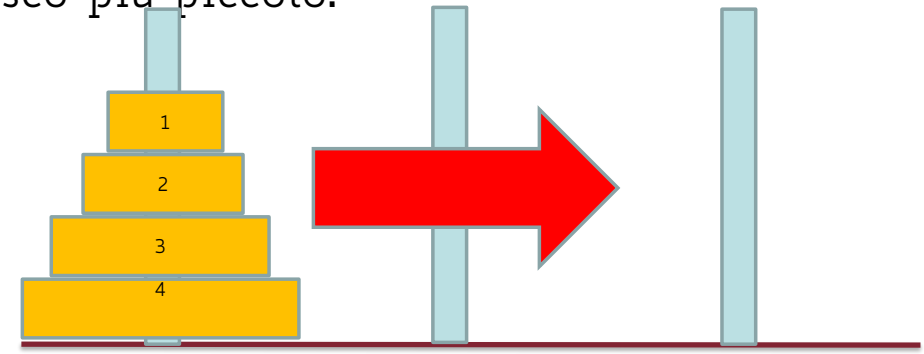
OSSERVAZIONE:
Non va bene stampare una chiave e poi richiamare sulla parte destra dell'array…

La ricorsione – esercizio 7 (1)

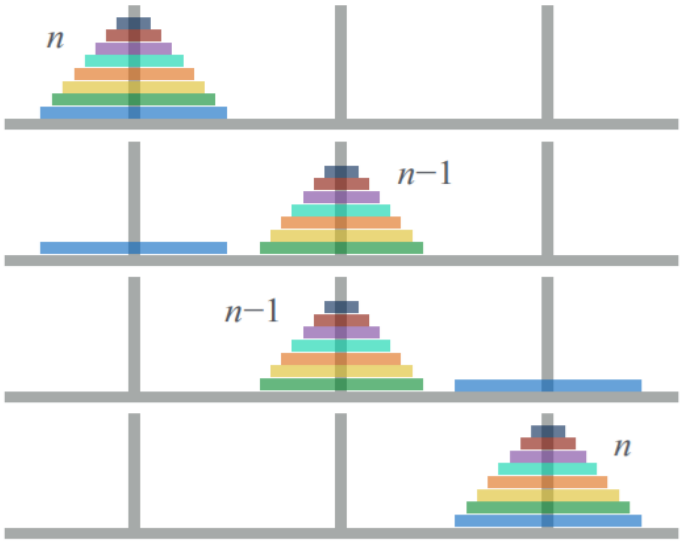
Torri di Hanoi

spostare una torre di dischi da un piolo ad un altro, con questi vincoli:

- In una mossa si può muovere un solo disco
- E' vietato spostare un disco più grande sopra un disco più piccolo.



La ricorsione – esercizio 7 (2)



[Disegno di Ozalp Babaoglu, Università di Bologna]

La ricorsione – esercizio 7 (3)

Strategia ricorsiva:
per spostare una torre di n dischi, dal piolo i al j:

1. Spostare gli n-1 dischi più piccoli da i a k;
2. Spostare il disco n-esimo (il più grande) da i a j;
3. Spostare gli n-1 dischi da k a j.

I passi 1. e 3. sono adatti all'uso della ricorsione, il passo 2 invece lo consideriamo un'operazione elementare.

La ricorsione – esercizio 7 (4)

```
def SpostaTorreH (n, i, j)
   if (n=0) return
   SpostaTorreH (n-1, i, 3- (i+j))
   SpostaDisco (i,j)
   SpostaTorreH (n-1, 3- (i+j), j)
```

📌

1. I pioli sono numerati da 0 a 2;
2. I dischi sono numerati dal più piccolo (1) al più grande (n)
3. La funzione SpostaTorreH quindi agisce sui dischi dall'alto.

La ricorsione – esercizio 7 (5)

Costo computazionale:

💡 per spostare una torre di n dischi, bisogna spostare due torri di n-1 dischi, il che ci fa capire che il numero di mosse cresce esponenzialmente con n (simile ai numeri di Fibonacci).

Esercizi per casa

Esercizi per casa

- Progettare una funzione ricorsiva che, dati due interi k ed n, $0 \le k \le n$, calcoli il valore del coefficiente binomiale n su k utilizzando la seguente relazione:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{con} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Progettare un algoritmo ricorsivo che, dati due interi x e y, $x > y > 0$, ne calcoli il massimo comun divisore utilizzando il seguente procedimento (di Euclide):
  - se y=0 allora MCD(x,y)=x
  - altrimenti MCD(x,y)=MCD(y,x%y)

    dove x%y rappresenta il resto della divisione tra x ed y

Esercizio risolto (guardare la sol. dopo aver provato a risolvere…)

- Dati due interi k ed n, $0 \le k \le n$, si calcoli il valore del coefficiente binomiale n su k utilizzando la seguente relazione:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{con} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Sol. Basta usare la def. ricorsiva data:

```
def Choose_Ric(k,n)
if (k=0) or (k=n) return 1;
return Choose_Ric(k,n-1)+Choose_Ric(k-1,n-1);
```

Costo: $T(k,n) = \Theta(1) + T(k,n-1)+T(k-1,n-1)$

$T(0,n) = \Theta(1)$, $T(n,n) = \Theta(1)$