Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
A.A. 2024/25

Il problema della ricerca

Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Il problema della ricerca (1)

Nell'informatica esistono alcuni problemi particolarmente rilevanti, poiché essi:

- si incontrano in una grande varietà di situazioni reali;
- ricorrono come sottoproblemi da risolvere nell'ambito di problemi più complessi.

Uno di questi problemi è la **ricerca di un elemento in un insieme di dati** (ad es. numeri, cognomi, ecc.).

Il problema della ricerca (2)

Definiamo più formalmente tale problema descrivendone l'input e l'output:

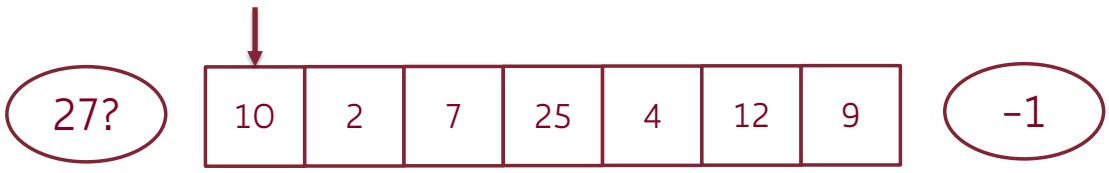
- Input: un array A di n valori (interi, stringhe, ecc.) ed un valore v;
- Output: un indice i tale che $A[i] = v$, oppure un particolare valore None se il valore v non è presente nell'array.

Ricerca sequenziale (1)

Un primo semplice algoritmo è basato su questa idea:

- ispezioniamo uno alla volta gli elementi dell'array;
- confrontiamo ciascun elemento con v;
- restituiamo il risultato, interrompendoci appena (non) trovato v

Vediamo il caso in cui v non è contenuto nell'array:



Ricerca sequenziale (2)

```
def Ricerca (A;v):
    i = 0                                   Θ(1)
    while((i<len(A))and(A[i]≠v))            Θ(1) + al più n volte:
        i += 1                                      Θ(1)
    if (i < len(A)):                        Θ(1)
        return i                            Θ(1)
    else:
        return -1                           Θ(1)
```


Ricerca sequenziale (3)

```
Funzione Ricerca (A;v)
i = 1                                   Θ(1)
while ((i<len(A))and(A[i]≠v))Θ(1) + al più n volte:
      i += 1                                    Θ(1)
if (i < len(A)): return i       Θ(1)
else: return null               Θ(1)
```

Costo computazionale:

- $\Theta(n)$ nel caso peggiore (quando, cioè, v non è contenuto nell'array)
- $\Theta(1)$ nel caso migliore (quando v viene incontrato per primo),

Non avendo trovato una stima del costo che sia valida per tutti i casi, diremo che il costo computazionale dell'algoritmo (in generale, non nel caso peggiore) è un $O(n)$, per evidenziare che ci sono input in cui questo costo viene raggiunto, ma altri in cui il costo è minore.

Ricerca sequenziale (4)

Quando i casi migliore e peggiore si discostano si può dare un valore stretto per il costo computazionale, ma possiamo domandarci quale sia il costo dell'algoritmo nel caso medio.

ipotesi: v può apparire con uguale probabilità in qualunque posizione, ossia:

$$\mathrm{P}(v \text{ si trovi in } i\text{-esima posizione}) = \frac{1}{n}$$

Allora il numero medio di iterazioni è dato da:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ricerca sequenziale (5)

ipotesi (alternativa): tutte le possibili $n!$ permutazioni della sequenza sono equiprobabili.

Di queste, ve ne saranno un certo numero in cui v appare in prima posizione, un certo numero nelle quali v appare in seconda posizione, ecc.

Il numero medio di iterazioni sarà quindi:

Numero medio di iterazioni =

$$=\sum_{i=1}^{n} i \frac{numero\ di\ permutazioni\ in\ cui\ v \text{ è } in\ posizione\ i}{numero\ totale\ di\ permutazioni}$$

Ricerca sequenziale (6)

Il numero di permutazioni nelle quali v appare nella i-esima posizione è uguale al numero delle permutazioni di (n-1) elementi, cioè (n – 1)!, dato che fissiamo solo la posizione di uno degli n elementi.

Quindi: Numero medio di iterazioni =

$$= \sum_{i=1}^{n} i \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$$

nota: NON è una dimostrazione generale!!!

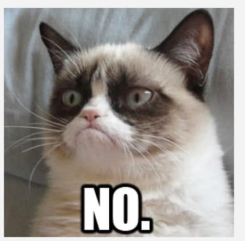
💡 Stesso risultato con due ipotesi di equiprobabilità diverse. Dunque, è ragionevole che il costo nel caso medio sia un $\Theta(n)$.

Ricerca sequenziale (7)

⚠ ATTENZIONE:
L'operatore *in* del Python che verifica se un elemento sia contenuto in un oggetto di tipo *list* utilizza una ricerca sequenziale, perciò ha costo computazionale O(n).

Ad esempio, il seguente frammento di codice:

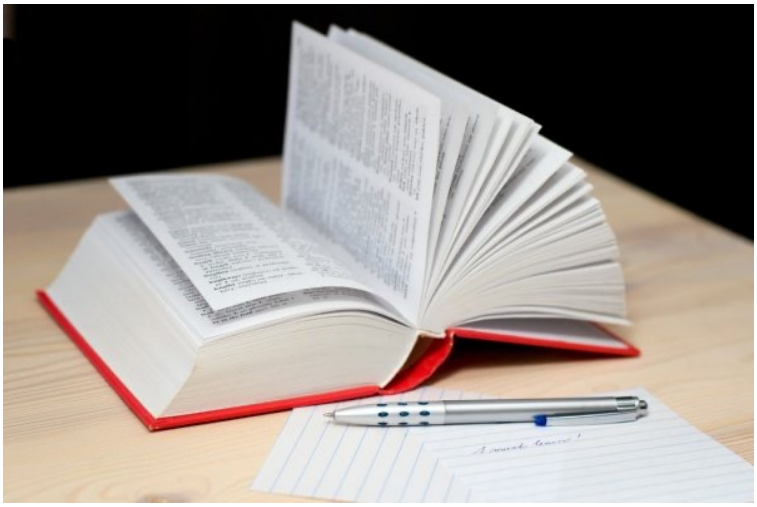
```
...
if v in A:
  print('presente')
else:
  print('assente')
...
```



ha costo O(n) nonostante non comprenda (apparentemente!) alcuna istruzione iterativa!

Ricerca binaria (1)

Ma nella vita di tutti i giorni, non cerchiamo così:



Ricerca binaria (2)

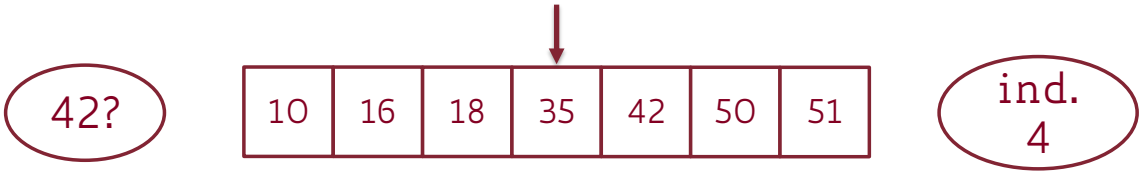
L'algoritmo della ricerca binaria funziona come segue:

Si ispeziona l'elemento centrale della sequenza:

- se esso è uguale al valore cercato ci si ferma;
- se il valore cercato è più piccolo si prosegue nella sola metà inferiore della sequenza, altrimenti nella sola metà superiore.

Ricerca binaria (3)

Vediamo un esempio nel quale l'elemento cercato (42) è presente.



Ricerca binaria (4)

```
def Ricerca_binaria(A,v):
a,b=0, len(A)-1
m =(a+b)//2
while (A[m]!=v):
   if (A[m] > v):
      b=m - 1
   else:
      a=m + 1
   if a > b:
      return -1
   m=(a+b)//2
return m
```

Ricerca binaria (5)

Costo computazionale?

Informalmente:
ad ogni iterazione si dimezza il numero degli elementi su cui lavorare, per cui il numero di iterazioni cresce come $\log n$.

Questo risultato è molto forte:
per trovare un elemento in una sequenza ordinata di un miliardo di valori bastano circa 30 iterazioni!

Ricerca binaria (6)

```
def Ricerca_binaria (A, v):
        a,b= 0, len(A)
        m= (a+b)//2
        while (A[m] ≠ v):
                if (A[m] > v): b=m-1
                else: a=m+1
                if (a > b): return -1
                m= (a+b)//2
        return m
```

Più formalmente:
all'i-esima iterazione la dimensione dell'input è $\frac{n}{2^i}$ quindi l'ultima i è $\log n$

In altre parole, il ciclo **`while`** viene eseguito al più logn volte; pertanto il costo è:

- $\Theta(\log n)$ nel caso peggiore (l'elem. non c'è);
- $\Theta(1)$ nel caso migliore (l'elem. viene trovato al primo colpo).

Ricerca binaria (7)

Poiché i casi migliore e peggiore non hanno lo stesso costo, valutiamo il costo del caso medio…

Assunzioni:

- il numero di elementi è una potenza di 2 (per semplicità di calcolo, ma è facile vedere che ciò non modifica il risultato finale);
- v è presente nella sequenza (altrimenti si ricade nel caso peggiore);
- tutte le posizioni di v fra 1 ed n sono equiprobabili.

Ricerca binaria (8)

Quante sono le posizioni $n(i)$ che possono essere controllate alla i-esima iterazione?

- con una iterazione si raggiunge la sola posizione $n/2$, cioè $n(1)=2^0=1$;
- con esattamente due iterazioni si raggiungono le due posizioni $\frac{n}{4}$ e $3\frac{n}{4}$, cioè $n(2)=2^1=2$;
- con esattamente tre iterazioni si raggiungono le quattro posizioni $\frac{n}{8}$, $3\frac{n}{8}$, $5\frac{n}{8}$, $7\frac{n}{8}$, cioè $n(3)=2^2=4$;

e così via…

Ricerca binaria (9)

…

In generale, la ricerca binaria esegue i iterazioni se v si trova in una delle $n(i)=2^{i-1}$ posizioni raggiungibili con esattamente tale numero di iterazioni.

La probabilità che l'elemento da trovare si trovi su una delle n(i) posizioni toccate dalla i-esima iterazione è $n(i)/n$ (ossia $2^{i-1}/n$), perciò il numero medio di iterazioni è:

…

Ricerca binaria (10)

numero medio di iterazioni = $\sum_{i=1}^{\log n} i\frac{n(i)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\log n} i2^{i-1}$

dove $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$ = (k-1)2^k + 1

per cui (sostituendo k=log n):

$$\frac{1}{n}\left((\log n - 1)2^{\log n} + 1\right) = \boldsymbol{\log n - 1 + \frac{1}{n}}$$

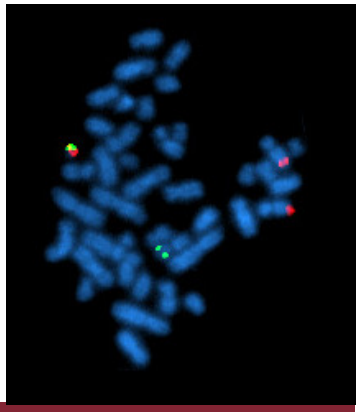
Ossia, il numero medio di iterazioni si discosta per meno di un confronto dal numero massimo di iterazioni!

Ricerca costante (1)

Problema: Data una sequenza di DNA S ed un certo frammento F, F è presente in S?
Ibridizzazione: processo che unisce due eliche singole di DNA in un'unica elica doppia (frammenti di singole eliche si attraggono e formano un'elica doppia se essi sono uno il complementare dell'altro).
Sonda: piccolo frammento di elica singola di DNA che ha una sequenza nota ed è fluorescente.

Ricerca costante (2)

L' ibridizzazione di una sonda in un frammento di DNA sconosciuto (= un singolo passo computazionale su una sorta di ipotetica macchina molecolare) evidenzia la presenza della sequenza complementare a quella della sonda nel frammento.



Cioè: algoritmo di ricerca con costo costante se consideriamo un diverso modello computazionale...

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esercizio per casa

(dal compito d'esame del 18/2/2021)
Sia dato un array A di interi e due valori a e b con a ≤ b, il problema è quello di sapere quanti elementi di A sono compresi nell'intervallo chiuso [a, b].

- Si progetti un algoritmo per risolvere tale problema su qualsiasi array A.
- Si progetti un algoritmo più efficiente del precedente assumendo che A sia già ordinato e che contenga solo valori distinti.

Per ciascun algoritmo si scriva lo pseudocodice e si analizzi il tempo di esecuzione asintotica.