Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
A.A. 2022/23

Il problema della ricerca

Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Il problema della ricerca (1)

Nell'informatica esistono alcuni problemi particolarmente rilevanti, poiché essi:

- si incontrano in una grande varietà di situazioni reali;
- appaiono come sottoproblemi da risolvere nell'ambito di problemi più complessi.

Uno di questi problemi è la ***ricerca di un elemento in un insieme di dati*** (ad es. numeri, cognomi, ecc.).

Il problema della ricerca (2)

Definiamo un po' più formalmente tale problema descrivendone l'input e l'output:

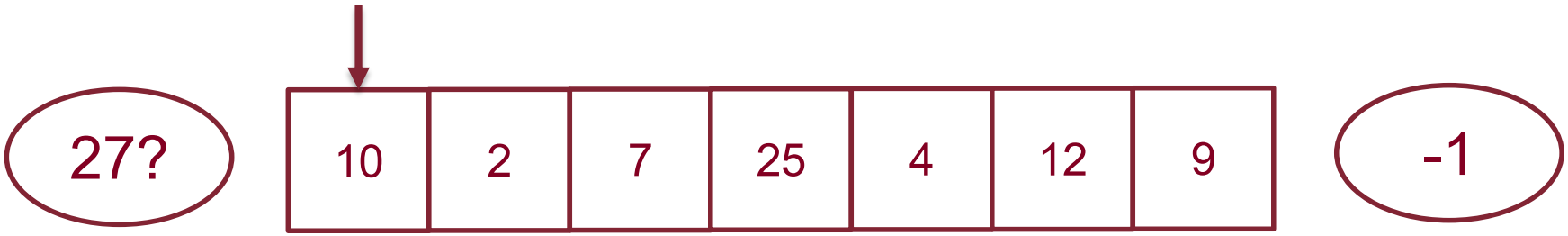
- **Input:** un ***array A*** di *n* valori (interi, stringhe, ecc.) ed un ***valore v***;
- **Output:** un ***indice i tale che A[i] = v***, oppure un particolare valore ***null*** se il valore *v* non è presente nell'array.

Ricerca sequenziale (1)

Un primo semplice algoritmo è basato su questa idea:

- ispezioniamo uno alla volta gli elementi dell'array;
- confrontiamo ciascun elemento con *v;*
- restituiamo il risultato, interrompendoci appena (non) trovato *v*

Vediamo il caso in cui *v* non è contenuto nell'array:



Ricerca sequenziale (2)

```
def Ricerca (A;v):
    i = 0                                   Θ(1)
    while((i<len(A))and(A[i]≠v))            Θ(1) + al più n volte:
        i += 1                              Θ(1)
    if (i < len(A)):                        Θ(1)
        return i                            Θ(1)
    else:
        return -1                           Θ(1)
```

Ricerca sequenziale (3)

```
Funzione Ricerca (A;v)
i = 1                                  Θ(1)
while ((i<len(A))and(A[i]≠v))          Θ(1) + al più n volte:
      i += 1.                          Θ(1)
if (i < len(A)): return i              Θ(1)
else: return null                      Θ(1)
```

Questo algoritmo ha un costo computazionale di:

- ***Θ(n)*** nel caso peggiore (quando, cioè, *v* non è contenuto nell'array)
- ***Θ(1)*** nel caso migliore (quando *v* viene incontrato per primo),

Poiché non abbiamo trovato una stima del costo che sia valida per tutti i casi, diremo che il costo computazionale dell'algoritmo (**in generale, non nel caso peggiore**) è un ***O(n)***, per evidenziare il fatto che ci sono input in cui questo valore viene raggiunto, ma ci sono anche input in cui il costo è minore.

Ricerca sequenziale (4)

Quando non è possibile determinare un valore stretto per il costo computazionale, perché i casi migliore e peggiore si discostano, possiamo domandarci quale sia il costo computazionale dell'algoritmo **nel caso medio**.

Facciamo l'ipotesi che *v* possa apparire con uguale probabilità in qualunque posizione, ossia che

P(v si trova in i-esima posizione) = $\frac{1}{n}$

Allora il numero medio di iterazioni del ciclo è dato da:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ricerca sequenziale (5)

Un'ipotesi alternativa è la seguente: supponiamo che tutte le possibili ***n!*** permutazioni della sequenza di *n* numeri siano **equiprobabili**.

Di queste, ve ne saranno un certo numero nelle quali *v* appare in **prima** posizione, un certo numero nelle quali *v* appare in **seconda** posizione, ecc.

Il numero medio di iterazioni sarà quindi:

Numero medio di iterazioni =

$$=\sum_{i=1}^{n} i \frac{numero\ di\ permutazioni\ in\ cui\ v\ \text{è}\ in\ posizione\ i}{numero\ totale\ di\ permutazioni}$$

Ricerca sequenziale (6)

Ora, il numero di permutazioni nelle quali *v* appare nella *i*-esima posizione è uguale al numero delle permutazioni di (n-1) elementi, cioè *(n – 1)!,* dato che fissiamo solo la posizione di uno degli *n* elementi.

Quindi:

Numero medio di iterazioni = $\sum_{i=1}^{n} i \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$

💡 Facendo due ipotesi di equiprobabilità diverse, abbiamo trovato lo stesso risultato. Dunque, possiamo ragionevolmente pensare che il costo computazionale del caso medio sia un ***Θ(n)***.

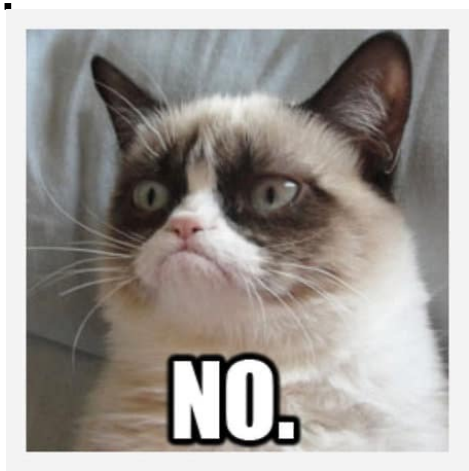
Ricerca sequenziale (7)

⚠ **ATTENZIONE**:

L'operatore *in* del Python che verifica se un elemento è contenuto in un oggetto di tipo *list* utilizza una ricerca sequenziale, perciò ha costo computazionale *O(n).*

Ad esempio, il seguente frammento di codice:

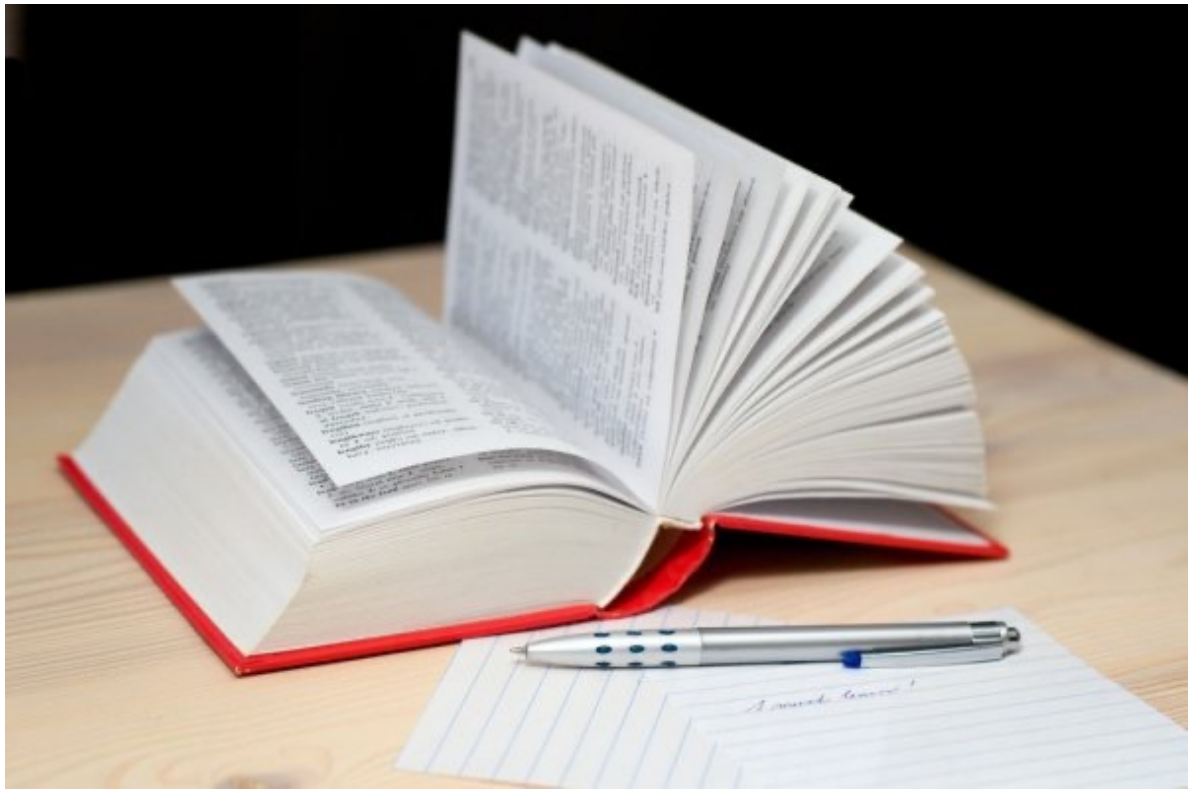
```
...
if v in A:
  print('presente')
else:
  print('assente')
...
```



ha costo *O(n)* nonostante non comprenda (apparentemente!) alcuna istruzione iterativa!

Ricerca binaria (1)

Ma nella vita di tutti i giorni, non cerchiamo così:



Ricerca binaria (2)

L'algoritmo della ***ricerca binaria*** funziona come segue:

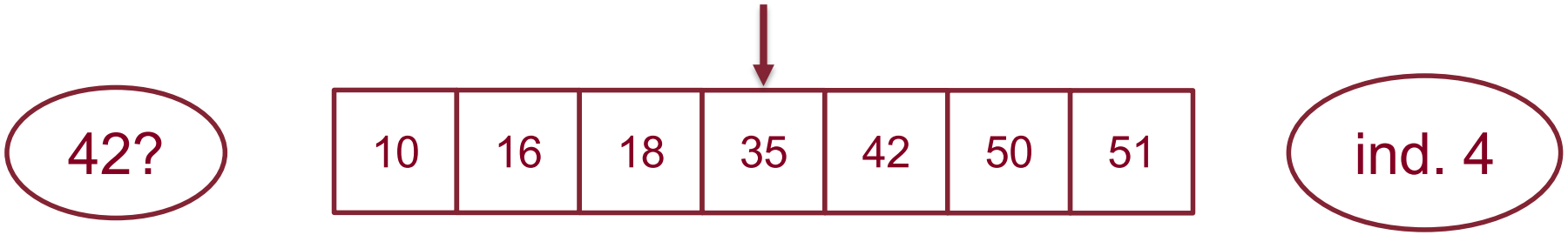
- Si ispeziona **l'elemento centrale** della sequenza:
  - se esso è uguale al valore cercato ci si ferma;
  - se il valore cercato è più piccolo si prosegue **nella sola metà inferiore** della sequenza, altrimenti **nella sola metà superiore**.

Così, ad ogni iterazione **si dimezza il numero degli elementi su cui proseguire l'indagine** ed il numero di iterazioni cresce come ***log n***.

Perciò, ad esempio, per trovare un elemento in una sequenza ordinata di un **miliardo di valori** bastano circa **30 iterazioni**!

Ricerca binaria (3)

Vediamo un esempio nel quale l'elemento cercato (42) è presente.



Ricerca binaria (4)

```
def Ricerca_binaria(A,v):
a,b=0, len(A)-1
m =(a+b)//2
while (A[m]!=v):
    if (A[m] > v):
        b=m - 1
    else:
        a=m + 1
    if a > b:
        return -1
    m=(a+b)//2
return m
```

Ricerca binaria (5)

```
def Ricerca_binaria (A, v):
        a,b= 0, len(A)
        m= (a+b)//2
        while (A[m] ≠ v):
                if (A[m] > v): b=m-1
                else: a=m+1
                if (a > b): return -1
                m= (a+b)//2
        return m
```

Il ciclo **`while`** viene eseguito al più $\Theta(\log n)$ volte; pertanto il costo computazionale è:

- $\Theta(\log n)$ nel caso peggiore (l'elemento non c'è);
- $\Theta(1)$ nel caso migliore (l'elemento si trova al primo colpo).

Poiché caso migliore e caso peggiore non hanno lo stesso costo, valutiamo il costo computazionale del **caso medio**…

Ricerca binaria (6)

Assunzioni:

- il numero di elementi è una **potenza di 2** (per semplicità di calcolo, ma è facile vedere che questa assunzione non modifica in alcun modo il risultato finale);
- ***v* è presente** nella sequenza (altrimenti si ricade nel caso peggiore);
- **tutte le posizioni di *v* fra 1 e *n* sono equiprobabili**.

Ricerca binaria (7)

Quante siano le posizioni ***n(i)*** raggiungibili alla ***i*-esima iterazione**?

- con una iterazione si raggiunge la sola posizione *n/2,* cioè ***n(1)=2⁰=1***;
- con esattamente due iterazioni si raggiungono le due posizioni $\frac{n}{4}$ e $3\frac{n}{4}$, cioè ***n(2)=2¹=2;***
- con esattamente tre iterazioni si raggiungono le quattro posizioni $\frac{n}{8}$, $3\frac{n}{8}$, $5\frac{n}{8}$, $7\frac{n}{8}$, cioè ***n(3)=2²=4***;

e così via.

In generale, la ricerca binaria **esegue *i* iterazioni** se *v* si trova in una delle $n(i)=2^{i-1}$ posizioni raggiungibili con esattamente tale numero di iterazioni.

Ricerca binaria (8)

La probabilità che l'elemento da trovare si trovi su una delle ***n(i)*** posizioni toccate dalla *i*-esima iterazione è ***n(i)/n*** (ossia $2^{i-1}/n$), perciò il numero medio di iterazioni è:

numero medio di iterazioni $= \sum_{i=1}^{\log n} i \frac{n(i)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\log n} i 2^{i-1}$

dove $\sum_{i=1}^{k} i 2^{i-1} = (k-1)2^k + 1$

per cui:

$$\frac{1}{n}\left((\log n - 1)2^{\log n} + 1\right) = \boldsymbol{\log n - 1 + \frac{1}{n}}$$

Ossia, il numero medio di iterazioni si discosta **per meno di un confronto** dal numero massimo di iterazioni!

Ricerca costante

Problema: Data una sequenza di DNA *S* ed un certo frammento *F*, *F* è presente in *S*?

Ibridizzazione: processo che unisce due eliche singole di DNA in un'unica elica doppia (frammenti di singole eliche si attraggono e formano un'elica doppia se essi sono uno il complementare dell'altro).

Sonda: piccolo frammento di elica singola di DNA che ha una sequenza nota ed è fluorescente.

L' ibridizzazione di una sonda in un frammento di DNA sconosciuto (= un singolo passo computazionale su una sorta di ipotetica macchina molecolare) evidenzia la presenza della sequenza complementare a quella della sonda nel frammento.

Cioè: algoritmo di ricerca con costo costante se consideriamo un diverso modello computazionale…

ESERCIZI PER CASA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esercizio per casa

(dal compito d'esame del 18/2/2021)

Sia dato un array *A* di interi e due valori *a* e *b* con $a \leq b$, il problema è quello di sapere quanti elementi di *A* sono compresi nell'intervallo chiuso *[a, b]*.

- Si progetti un algoritmo per risolvere tale problema su qualsiasi array *A*.
- Si progetti un algoritmo più efficiente del precedente assumendo che *A* sia già ordinato e che contenga solo valori distinti.

Per ciascun algoritmo si descriva a parole l'idea, si scriva lo pseudocodice e si analizzi il tempo di esecuzione asintotica.