

## Esercitazione 2 (10 marzo '09)

Dott.ssa Gaia Maselli ([maselli@di.uniroma1.it](mailto:maselli@di.uniroma1.it))

Alcuni esercizi sono presi da:

[http://twiki.di.uniroma1.it/pub/Algoritmi1/Inf/WebHome/COMPL\\_ASINTOTICA.doc](http://twiki.di.uniroma1.it/pub/Algoritmi1/Inf/WebHome/COMPL_ASINTOTICA.doc)

### Esercizio 2.1

Sia  $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ . Usando le definizioni di  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$ , dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

$f(n) = O(n), O(n^2), O(n^4), \Omega(n), \Omega(n^2), \Omega(n^4), \Theta(n), \Theta(n^2), \Theta(n^4)$ .

#### Soluzione

1.  $f(n) \neq O(n)$  infatti  $\frac{n(n+1)}{2} \not\leq cn$  comunque si prenda la costante  $c$ .
2.  $f(n) = O(n^2)$  in quanto  $\frac{n(n+1)}{2} \leq cn^2$  scegliendo  $c = 1, n_0 = 1$ .
3.  $f(n) = O(n^4)$  in quanto  $\frac{n(n+1)}{2} \leq cn^4$  scegliendo  $c = 1, n_0 = 1$ .
4.  $f(n) = \Omega(n)$  in quanto  $\frac{n(n+1)}{2} \geq cn$  scegliendo  $c = 1, n_0 = 1$ .
5.  $f(n) = \Omega(n^2)$  in quanto  $\frac{n(n+1)}{2} \geq cn^2$  scegliendo  $c = 1/2, n_0 = 0$ .
6.  $f(n) \neq \Omega(n^4)$  in quanto  $\frac{n(n+1)}{2} \not\geq cn^4$  comunque si prenda la costante  $c$ .
7. Dai casi 1 e 4 segue che  $f(n) \neq \Theta(n)$ .
8. Dai casi 2 e 5 segue che  $f(n) = \Theta(n^2)$ .
9. Dai casi 3 e 6 segue che  $f(n) \neq \Theta(n^4)$ .

### Algebra della notazione asintotica

1. Per ogni  $k > 0$  e per ogni  $f(n) \geq 0$ , se  $f(n) = O(g(n))$ , allora  $k f(n) = O(g(n))$ .
2. Per ogni  $f(n), d(n) > 0$ , se  $f(n) = O(g(n))$  e  $d(n) = O(h(n))$ , allora  $f(n) + d(n) = (g(n) + d(n)) = O(\max(g(n), h(n)))$ .
3. Per ogni  $f(n), d(n) > 0$ , se  $f(n) = O(g(n))$  e  $d(n) = O(h(n))$ , allora  $f(n)d(n) = O(g(n)h(n))$ .

#### Dimostrazione.

1. Per ipotesi,  $f(n) = O(g(n))$  quindi esistono due costanti  $c$  ed  $n_0$  tale che  $f(n) \leq c g(n) \quad \forall n \geq n_0$ .  
Segue che  $k f(n) \leq k c g(n)$ . Questo prova che, prendendo  $k c$  come nuova costante  $c'$  e mantenendo lo stesso  $n_0$ ,  $k f(n) = O(g(n))$ .
2. Se  $f(n) = O(g(n))$  e  $d(n) = O(h(n))$ , allora esistono quattro costanti  $c'$  e  $c''$ ,  $n_0'$  ed  $n_0''$  tali che  $f(n) \leq c' g(n) \quad \forall n \geq n_0'$  e  $d(n) \leq c'' h(n), \quad \forall n \geq n_0''$ .  
Allora  $f(n) + d(n) \leq c' g(n) + c'' h(n) \leq \max(c', c'')(g(n) + h(n)) \quad \forall n \geq \max(n_0', n_0'')$ .  
Da ciò segue che  $f(n) + d(n) = (g(n) + d(n))$ .  
Infine,  $\max(c', c'')(g(n) + h(n)) \leq 2(\max(c', c'') \max(g(n), h(n)))$ .  
Ne segue che  $f(n) + d(n) = O(\max(g(n), d(n)))$ .

3. Se  $f(n) = O(g(n))$  e  $d(n) = O(h(n))$ , allora esistono quattro costanti  $c'$  e  $c''$ ,  $n_0'$  ed  $n_0''$  tali che  $f(n) \leq c' g(n) \forall n \geq n_0'$  e  $d(n) \leq c'' h(n)$  per ogni  $\forall n \geq n_0''$ .  
Allora,  $f(n) d(n) \leq c' g(n) c'' h(n) \leq \max(c', c'')(g(n)h(n)) \forall n \geq \max(n_0', n_0'')$ .  
Si può quindi concludere che  $f(n)d(n) = O(g(n)h(n))$ .

In modo analogo, è possibile dimostrare anche le stesse regole valgono per la notazione  $\Omega$  e  $\Theta$ .

### Esempio

Trovare una stima asintotica stretta per  $f(n) = 3n * 2^n + 4n^4$ .

#### Soluzione

$$3n * 2^n + 4n^4 = \Theta(n)\Theta(2^n) + \Theta(n^4) = \Theta(n 2^n) + \Theta(n^4) = \Theta(n 2^n).$$

### Esempio

Trovare una stima asintotica stretta per  $f(n) = 2^{n+1}$

#### Soluzione

$$2^{n+1} = 2 * 2^n = \Theta(2^n)$$

### Esempio

Trovare una stima asintotica stretta per  $f(n) = 2^{2n}$ .

#### Soluzione

$$2^{2n} = \Theta(2^{2n})$$

Le costanti si possono ignorare solo se non sono all'esponente.