Ancora Perle: Matrimoni Stabili o Le Affinità Elettive

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, Lezione **20(b)**

Ivano Salvo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Un problema di Teoria dei Giochi

Problema: Il problema di oggi è ispirato all'ammissione nei college americani.

- Gli **aspiranti** hanno una **lista di preferenze** (**ranking**).
- I **college** cominciano a **scegliere**, sulla base delle loro **valutazioni** e chiamano gli allievi.

Criticità: più college possono chiamare lo stesso allievo e di conseguenza questo può **generare catene di rinunce** e **rimpiazzamenti**.

Può non essere chiaro se sia meglio aspettare altre rinunce per essere ammessi a un college migliore oppure accettare subito una \`buona proposta' (problemi simili per le università).

Il problema è asimmetrico: un college ammette più studenti, ma un aspirante alla fine dovrà scegliere un singolo college.

Noi vedremo una **versione semplificata** e **simmetrica**, in cui occorre determinare un accoppiamento 1:1 che **non generi scambi di coppie** nota in letteratura come **Matrimoni Stabili**.

Dame e Cavalieri: il problema

C'è un insieme $\boldsymbol{D}$ di n **dame** e un insieme $\boldsymbol{C}$ di n **cavalieri**.

Ogni dama $d \in D$ ha un **ordinamento totale** $>_d \subseteq C \times C$ che esprime le **sue preferenze** sui cavalieri.

Similmente, **ogni cavaliere** $c \in C$ ha **un ordine totale** $>_c \subseteq D \times D$ che esprime le **sue preferenze** sulle dame.

➧ Il **problema** consiste nel trovare un **accoppiamento** $A \subseteq C \times D$ che sia **stabile**, cioè in cui non esistono due coppie $\{(c, d), (c', d')\} \subseteq A$ per cui c preferisca d' a d (cioè $d' >_c d$) e d' preferisca c a c' (cioè $c >_{d'} c'$).

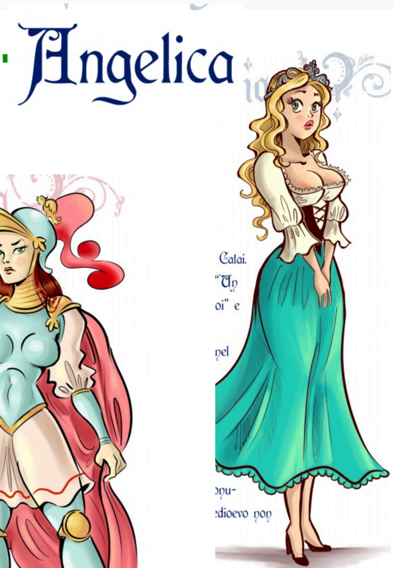
In caso di una **coppia instabile**, infatti, la coppia scoppia e c e d' **entrambi preferiscono lasciare i loro compagni** in A e **formare la nuova coppia** (c, d').

Dame e Cavalieri: Esempio 1

Facciamo alcuni esempi, nel caso in cui $n = 2$.

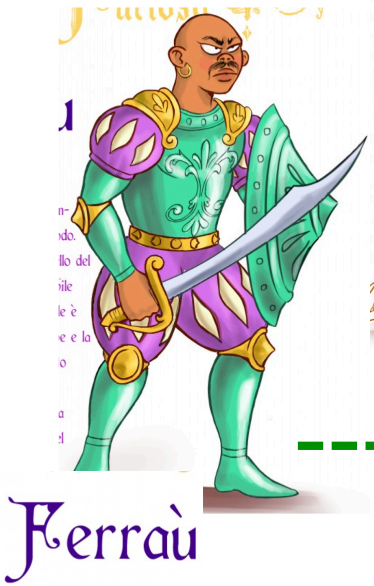
Caso 1: Liste di preferenze **uguali**. In questo caso, i due cavalieri c_1 e c_2 hanno le stesse preferenze sulle dame (diciamo $d_1 >_{c^*} d_2$) e le due dame hanno le stesse preferenze sui cavalieri (diciamo $c_1 >_{d^*} c_2$).

L'unico accoppiamento stabile è $\{(c_1, d_1), (c_2, d_2)\}$. Ovviamente, c_1 e d_1 preferendosi reciprocamente, finiranno con l'accompagnarsi.



Entrambe le dame preferiscono Orlando

entrambi i cavalieri preferiscono Angelica



Dame e Cavalieri: caso "incrociato"

Caso 2: Le liste di preferenza **sono entrambe incrociate** e **opposte**. I due cavalieri hanno preferenze diverse sulle dame (diciamo $d_1 >_{c1} d_2$ e $d_2 >_{c2} d_1$) e le due dame hanno preferenze **diverse** sui cavalieri e "**opposte**" a **quelle dei cavalieri** (diciamo $c_2 >_{d1} c_1$ e $c_1 >_{d2} c_2$).

Ruggero ha appena salvato Angelica dall'orca di Ebuda e lei si è innamorata di lui.

Bradamante ha bevuto alla fontana dell'odio e, ingelosita, ora preferisce Orlando.

Dame e Cavalieri: caso "incrociato"

Questo è il caso più interessante, perché ci sono **2 accoppiamenti stabili**.

L'accoppiamento $A = \{(c_1, d_1), (c_2, d_2)\}$ è "ottimo" per i cavalieri , cioè ogni cavaliere sta con la sua favorita.

Viceversa, l'accoppiamento $A' = \{(c_1, d_2), (c_2, d_1)\}$ è "ottimo" per le dame, in quanto ogni dama sta con il suo preferito.

Risultato 1:

Orlando con *Angelica* e
Ruggero con *Bradamante*

Entrambi i cavalieri stanno con le loro favorite, ma entrambe le dame con le loro "seconde scelte".

Risultato 2:

Orlando con *Bradamante* e
Ruggero con *Angelica*

Entrambe le dame stanno con i loro campioni, ma entrambi i cavalieri con le loro "seconde scelte".

sono entrambi accoppiamenti stabili perché non ci sono scambi consensuali possibili

Un po' di notazioni

- Dato l'insieme dei cavalieri C e delle dame D, e un accoppiamento A, indicheremo con $\boldsymbol{A|_D}$ e con $\boldsymbol{A|_C}$ rispettivamente le **dame e i cavalieri** che risultano **accoppiati** in A.
- Data una dama $d \in A|_{\mathrm{D}}$ e un cavaliere $c \in A|_{\mathrm{C}}$ indicheremo rispettivamente con $\boldsymbol{A(d)}$ e $\boldsymbol{A(c)}$ i **compagni di *d* e *c*** e d in A.
- Indicheremo con ***N*** e ***S*** rispettivamente l'insieme delle dame **nubili** e dei cavalieri **scapoli** in un certo momento (vale ovviamente la proprietà $N = D \setminus A|_{\mathrm{D}}$ e $S = \mathrm{C} \setminus A|_{\mathrm{C}}$).
- Quando un cavaliere c si propone a una dama d, teniamo traccia di questo fatto nell'insieme $\boldsymbol{P(c)}$ delle **dame a cui si è proposto**.

Strategia di Gale & Shepley - G/S

Idea: costruire un **accoppiamento *A***, che non decresce nel tempo ma che **rimane stabile**.

Un **accoppiamento stabile banale** è **quello vuoto**.

Per avere speranza di trovare una soluzione, occorre ancora una volta **scegliere un ordine** con cui **accrescere l'insieme A** degli accoppiamenti.

Consideriamo la seguente **strategia**:

- ogni cavaliere c si propone alla sua favorita $d \notin P(c)$, cioè **la preferita** tra quelle a cui **non si è ancora proposto**;
- La dama ***d*** **accetta sempre** di accoppiarsi con c se è **nubile**.
- Se **non è nubile**, **accetta solo se preferisce *c* al suo attuale compagno**, cioè $c >_d A(d)$.

Proprietà della strategia G/S (1)

1. Le **dame** accompagnate, **non tornano mai nubili**.

Infatti, per effetto di una proposta, rimangono comunque nell'accoppiamento A eventualmente **accompagnandosi a cavalieri "migliori"** nel loro ordine di preferenza.

2. I **cavalieri non si propongono mai 2 volte** alla **stessa dama**.

… infatti, loro fanno le proposte in ordine. I **cavalieri** possono essere **abbandonati** da una dama se questa riceve una proposta migliore e quindi tornare nell'insieme degli scapoli S, ma non si ripropongono.

Per questo motivo, gli **accoppiamenti dei cavalieri "peggiorano"**.

3. **Un cavaliere scapolo** ha sempre una dama a cui non si è già proposto (e quindi **non perde mai la speranza di accoppiarsi**)…

… infatti, abbiamo necessariamente che $|N| = |S|$ e per (**1**) se $d \in N$ allora ***d* non ha mai ricevuto proposte**. Neanche da c.

Proprietà della strategia G/S (2)

Proposizione: Sia A' l'accoppiamento ottenuto da A seguendo la strategia G/S. Se A è stabile, allora anche A' è stabile.

Dim: Analizziamo i 3 casi della strategia:

Caso 1: il cavaliere c si propone a d, ma $A(d) >_d c$: in questo caso non succede nulla e $A' = A$.

Caso 2: il cavaliere c si propone a $d \in N$. (c, d) viene aggiunto ad A. Nessun cavaliere in $c' \in A|_C$ preferisce d alla sua dama $A(c')$: d è nubile e quindi nessuno le si è ancora proposto, e quindi viene dopo nella lista di preferenze dei cavalieri in $A|_C$.

Caso 3: il cavaliere c si propone a $d \in A|_C$ e d preferisce c a $A(d)$. C'è lo scambio. Posso aver generato un'instabilità?

Potrebbe d preferire un altro compagno c' che preferisce lei alla sua attuale compagna? **No**, perché altrimenti A già non sarebbe stato stabile, essendo $c' >_d c >_d A(d)$ e $d >_{c'} A(c')$.

Potrebbe c preferire un'altra dama d' che preferisce lui ad $A(d')$? **No**, perché se $d' >_c d$ allora c si è già proposto a d' e o **è stato rifiutato** o **è stato abbandonato.** In entrambi i casi $A(d') >_{d'} c$. □

Terminazione della strategia G/S (2)

I **candidati naturali** a essere misure di terminazione **non lo sono**:

- l'insieme *N* delle nubili **può non decrescere**: tutte le volte che viene fatta una proposta a una dama non accompagnata.
- l'insieme **S** degli scapoli **può non decrescere**: anche questo succede quando un cavaliere si propone a una dama già accompagnata:
  - il cavaliere **rimane scapolo** se viene rifiutato
  - si accoppia alla dama **rendendo scapolo il suo compagno**

Di conseguenza, anche A può non crescere: del resto valgono gli invarianti $|\mathbf{S}| = |\mathbf{N}| = n - |\mathbf{A}|$.

Quello che **decresce sempre** sono le **proposte ancora possibili**, cioè la cardinalità dell'insieme $\cup_{c \in C} D \setminus P(c)$.

Ma abbiamo visto che finché ci sono scapoli e nubili questo insieme non è vuoto (vedi proprietà **3**) e ha cardinalità massima n^2. Quindi $n^2 - |\cup_{c \in C} D \setminus P(c)|$ è **positiva** e **decrescente**.

In altre parole, è una **funzione di terminazione** per la strategia G/S.

Quale accoppiamento stabile?

L'algoritmo visto **dimostra che esiste sempre** un accoppiamento **stabile** in modo **costruttivo**, **trovandolo**. Abbiamo visto però che, già con 2 dame e cavalieri, possono esistere più equilibri.

Ma **quale equilibrio** viene trovato?

E questo equilibrio **dipende dall'ordine** delle proposte?

Dobbiamo dare un altro paio di definizioni.

- d è un **partner valido** di c (e c è un partner stabile di d) se esiste un accoppiamento stabile A tale che $(c, d) \in A$.
- d è il **miglior partner valido** di c, se per ogni altro partner valido d' di c, ho $d >_c d'$.

Esempi: Ferraù non è un partner valido di Angelica, né Bradamante di Orlando nel primo esempio, perché c'è un solo accoppiamento stabile {(Orlando, Angelica), (Ferraù, Bradam.)};

Nel secondo esempio, **ci sono due equilibri**. Ruggero è il miglior partner valido di Angelica (ma non viceversa) e Orlando è il miglior partner valido di Bradamante (ma non viceversa).

Il paradiso dei cavalieri…

Dimostriamo una proprietà notevole dell'algoritmo visto.
Definiamo l'accoppiamento ***A**** = $\{(c, best(c)) \mid c \in C\}$.

Teorema: *L'algoritmo basato sulla strategia G/S calcola A*.*

Dim: Sia A l'accoppiamento calcolato con G/S e assumiamo esista qualche coppia $(c, d) \in A$ con $d < best(c)$.

Siccome i cavalieri fanno le proposte in ordine, prendiamo il cavaliere c che per **primo è stato rifiutato** o **abbandonato** dalla sua miglior scelta possibile $d' = best(c)$.

Sia c' il cavaliere con cui d si è/era unita dopo/prima il rifiuto di c.

Se d' è un partner valido di c, esiste un A' *stabile* in cui $(c, d') \in A'$. Ma cosa possiamo dire di d'' tale che (c', d'') in A'? Chiaramente $c' >_{d'} c$ e quindi dev'essere $d'' >_{c'} d'$, altrimenti A' non sarebbe stabile (c' e d' formerebbero un'instabilità).

Quindi, c' si è proposto a d'' prima di d' seguendo G/S ed è stato rifiutato o abbandonato da d'' durante G/S prima di proporsi a d' e prima che d' lo scegliesse rifiutando c'. Questo contraddice l'ipotesi che il suo rifiuto/abbandono di c sia stato il primo dell'algoritmo. $\square$

… e l'inferno delle Dame

Si può dimostrare anche il seguente:.

Teorema: $A^* = \{(worst(d), d) \mid d \in D\}$.

Dim: Supponiamo ciò non sia vero ed esista una coppia $(c, d) \in A^*$ per cui $c >_d worst(d) = c'$.

Quindi esiste un altro equilibrio A', tale che (c', d) è in A'.

Siccome sappiamo che $d = best(c)$ per def. di A^*, abbiamo anche che c è accoppiato in A' con d' tale che $d >_c d'$.

Ma questo significa che c e d producono un'instabilità in A', contro l'ipotesi che sia un equilibrio. □

Strategia G/S: pseudo-codice

Ecco lo **pseudo-codice** astratto. Trattiamo insiemi con inserimenti, rimozioni etc. Vediamo poi come una singola iterazione di questo algoritmo si possa fare in tempo $\theta(1)$ con opportune strutture dati.

```
def dame&Cavalieri(D, C, >):
    A, S = ∅, C
    forall c ∈ C: P(c) = ∅
    while S ≠ ∅: # INV: A stabile
        c = choose(S) # l'ordine non è rilevante
        d = max_c(D \ P(c))
        P(c) = P(c) ∪ {d}
        if A(d) == •: # d è nubile
            A, S = A ∪ {(c, d)}, S ∖ {c}
        else:
            c′ = A(d)
            if c >_d c′ : # d preferisce c a A(d)
                A = A ∖ {(c′, d)} ∪ {(c, d)},
                S = S ∖ {c} ∪ {c′}
    return A
```

Due note sull'implementazione

L'algoritmo G/S **termina** in $\Theta(n^2)$ iterazioni. Il **costo di un'iterazione** tuttavia può essere **dipendente dalle strutture dati** usate.

Occorre **ispezionare le operazioni** per capire come codificare gli insiemi e gli ordini coinvolti.

Cavalieri e Dame possono essere **codificati** semplicemente con dei numeri **interi nell'intervallo** $[0, n)$ e così facendo sono **naturalmente gli indici di qualche vettore**.

I cavalieri ispezionano in sequenza di preferenza le dame, quindi **l'ordine di preferenza** di ciascun **cavaliere** è un **vettore di dame ordinato** (o anche **una lista** su cui vedere il prossimo).

Le dame devono rispondere alla domanda $c >_d c'$ quindi **per le preferenze delle dame** è favorevole **avere** un vettore *dpref* tale che ***dpref*[*i*] è la posizione** del cavaliere i nel **loro ordine di preferenza**.

L'insieme degli **scapoli** può essere **una lista** in cui **inserire in testa/coda** (ma in realtà l'ordine non fa differenza, per i teoremi)

Infine, l'**accoppiamento** può essere un **vettore indicizzato sulle dame**, perché sono le dame che hanno necessità di conoscere a chi sono accoppiate per decidere se abbandonare l'attuale compagno.

ecco il giudicio uman come spesso erra!
Quella che dagli esperi ai liti eoi
avea difesa con sì lunga guerra,
or tolta gli è fra tanti amici suoi,
senza spada adoprar, ne la sua terra.

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, Lezione **20** [13/5/22]

Ivano Salvo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA