

Grafi I: Basic Theory

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, **Ivano Salvo**

Lezione **21(a)** [5/12/22]



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

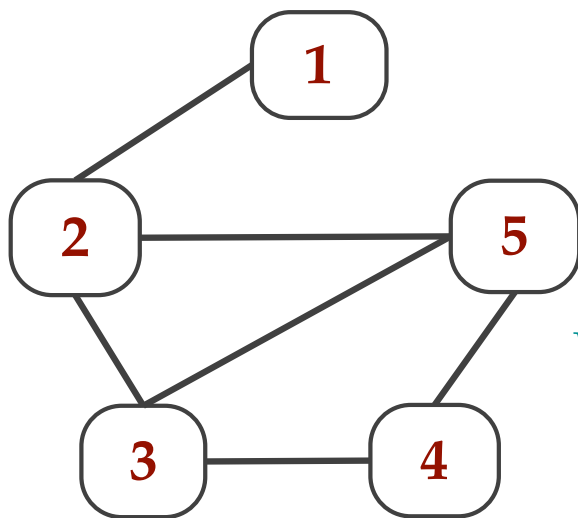
Definizioni di/sui grafi

Un **grafo** G è una coppia (V, E) , dove V è un insieme di **nod**i (o **vertici**) ed $E \subseteq V \times V$ è un insieme di **archi** (o **spigoli**).

Gli archi vengono usualmente denotati con una coppia (u, v) .

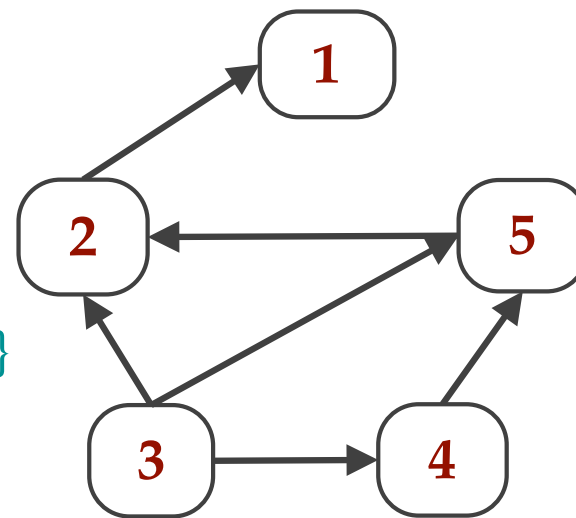
Un grafo è **non orientato**, se la coppia (u, v) è **non ordinata**, cioè se riteniamo equivalenti (u, v) e (v, u) . In questo caso, sarebbe più preciso denotare uno spigolo con un **insieme di due elementi** $\{u, v\}$.

Viceversa G è **orientato** (o **diretto** o **digrafo**). In tal caso, gli archi vengono a volte denotati con la scrittura $u \rightarrow v$.



$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5) \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



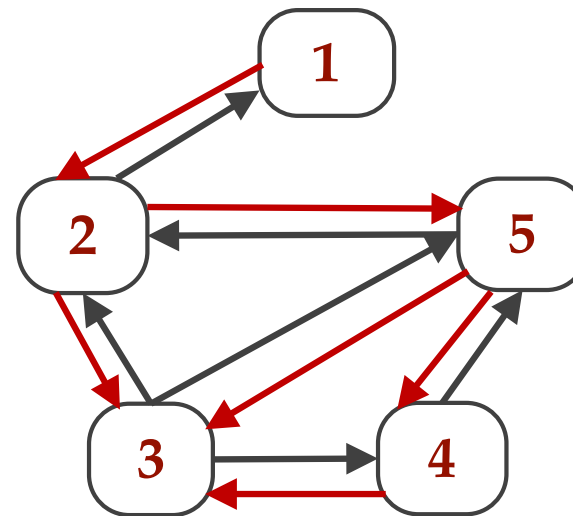
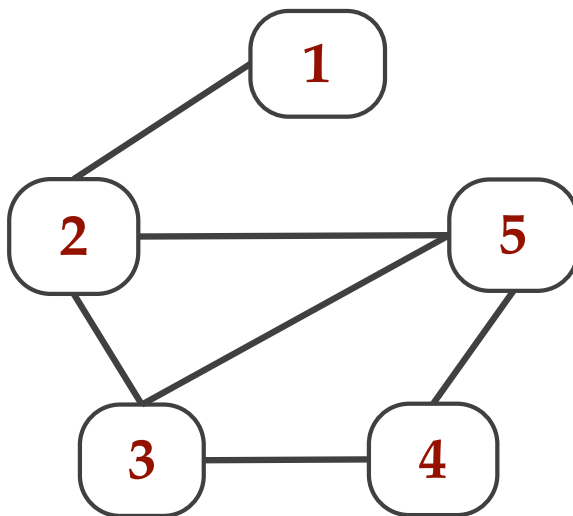
$$E = \{ 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 5, 4 \rightarrow 5 \}$$

Grafi orientati e non orientati

Due nodi u e v collegati da un arco sono detti **adiacenti** e l'arco è detto **incidente** in u e v . Nei grafi orientati si parla piuttosto di **predecessore** e **successore** e l'arco $u \rightarrow v$ è detto **uscente** da u ed **entrante** in v .

I **grafi orientati** sono **più generali**: sono il linguaggio delle relazioni binarie su V . I **grafi non orientati**, viceversa, sono **relazioni** binarie **simmetriche**.

In quasi tutti i problemi, un **grafo non orientato** può essere facilmente **codificato** con uno **orientato**: ogni spigolo (u, v) viene codificato con una coppia di archi $u \rightarrow v$ e $v \rightarrow u$.



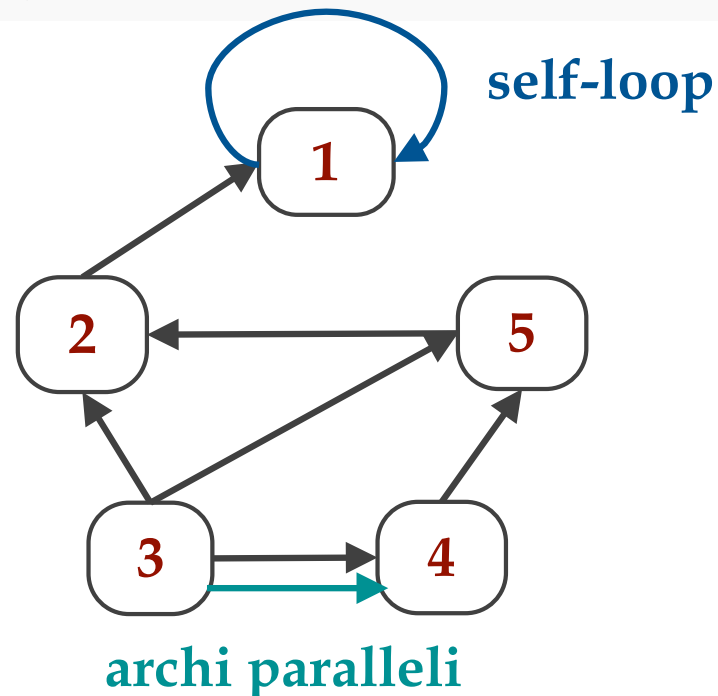
Grafi semplici

Un **cappio** (o **self-loop**) è un arco (u, u) .

In alcuni casi, si considerano anche **archi paralleli** che connettono la stessa coppia di nodi (in tal caso E è un **multi-insieme** piuttosto che un insieme).

Un **grafo** senza cappi e archi paralleli è detto **semplice**. Un grafo **orientato** con **archi paralleli** e **self-loop** è detto **multi-digrafo**.

Quando non altrimenti specificato, ci riferiremo sempre a **grafi semplici non orientati**.

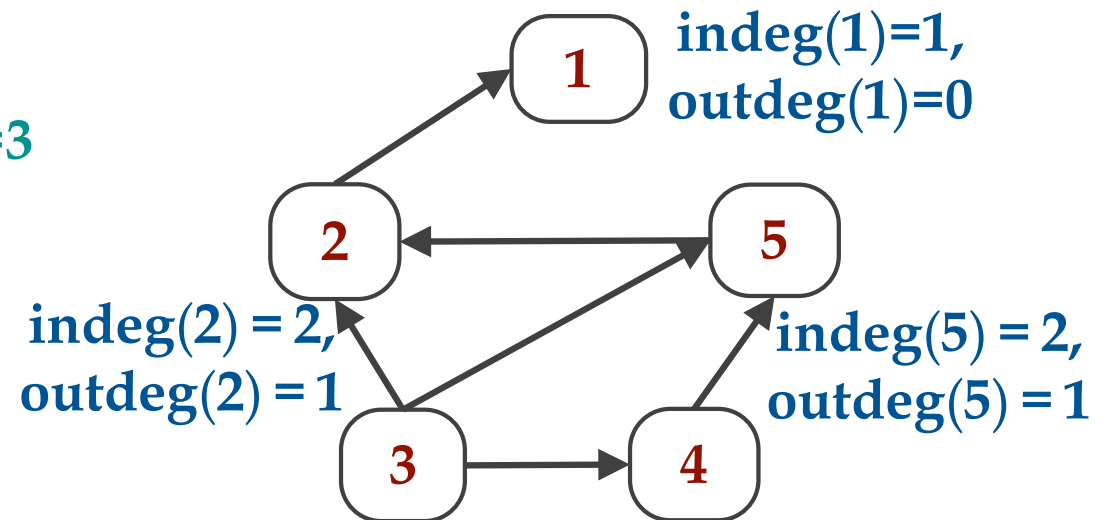
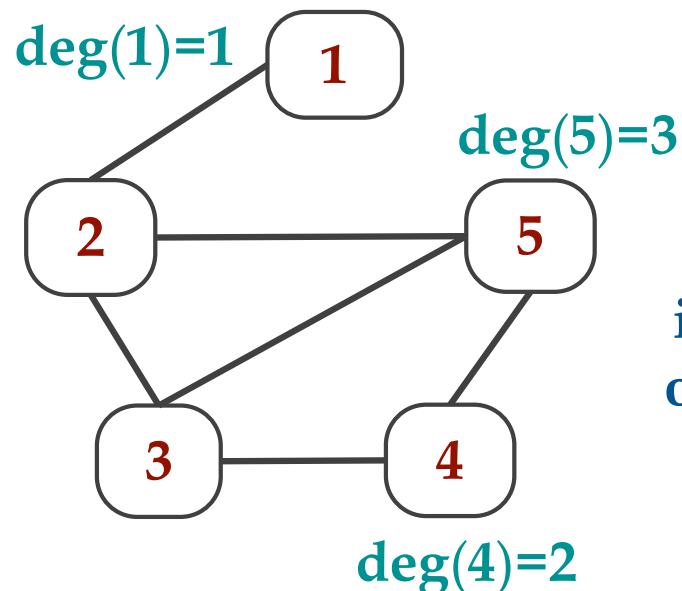


Grado e altre misure

Nelle misure di complessità, indicheremo quasi sempre con $n = |V|$ e $m = |E|$. Quando $n = \mathcal{O}(m)$ diremo che il grafo è **sparso**.

Il **grado** di un nodo v (**degree**(v) o **deg**(v)) è il numero di archi incidenti nel nodo. In un grafo orientato si parla piuttosto di grado uscente e grado entrante (**outdeg**(v) e **indeg**(v))

In un grafo **semplice non orientato**, abbiamo che il grado di ogni nodo è un numero tra 0 (nodo isolato) e $n-1$ e il numero di archi m soddisfa la disequazione $0 \leq m \leq \binom{n}{2} = n(n-1)/2$.



Gradi e numero di archi

Proposizione: In un grafo **non orientato**, la somma di tutti i gradi $\sum_{v \in V} \text{deg}(v)$ è $2m$.

In un **grafo diretto**, $\sum_{v \in V} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = m$.

Dim: $\text{deg}(v) = |\{(u, v) \mid u \in V, (u, v) \in E\}|$. Ogni arco (u, v) **viene contato 2 volte**, nel calcolo di $\text{deg}(u)$ e in quello di $\text{deg}(v)$.

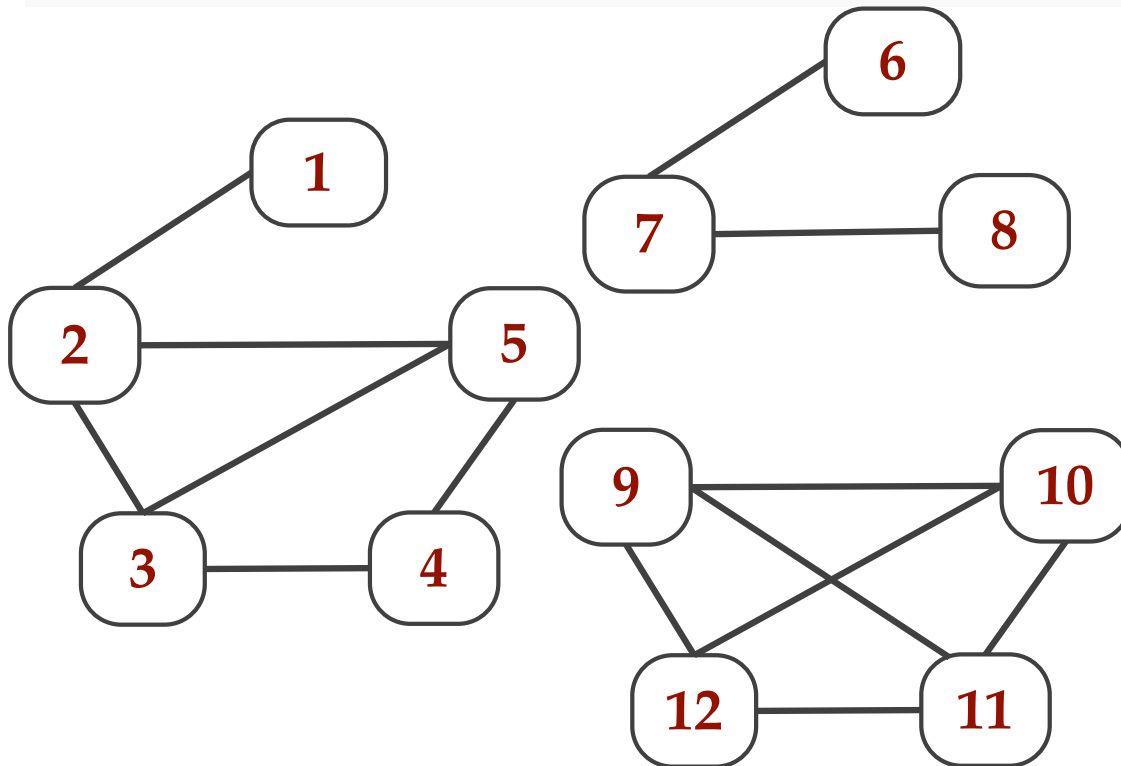
In un grafo diretto, invece, ogni arco $u \rightarrow v$ compare nel calcolo di $\text{outdeg}(u)$ e di $\text{indeg}(v)$. Quindi sia la somma dei gradi entranti che la somma degli archi uscenti conta **ogni arco una e una sola volta**. $\square$

Passeggiate & Cammini

Una **passeggiata** in un grafo è una sequenza $v_0 e_0 v_1 e_1 v_2 \dots e_{n-1} v_n$ tale che $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$. La **lunghezza** della passeggiata è n , cioè il numero di archi attraversati. Nei grafi semplici, indicheremo una passeggiata solo con una **sequenza di nodi**.

Un **cammino** da u a v è una passeggiata in cui $v_0 = u$ e $v_n = v$ **senza ripetizioni di archi**. Un cammino è **semplice** se **non ci sono ripetizioni di nodi** (e quindi neanche di archi).

Un cammino da u a u è detto **circuito** e **ciclo** se è **semplice** (a parte u).



1 2 5 3 2 5 4 è una **passeggiata** nel grafo.

1 2 5 3 4 5 è un **cammino**.

1 2 3 5 4 è un **cammino semplice**.

3 4 5 3 e 10 9 11 12 10, sono **cicli**.

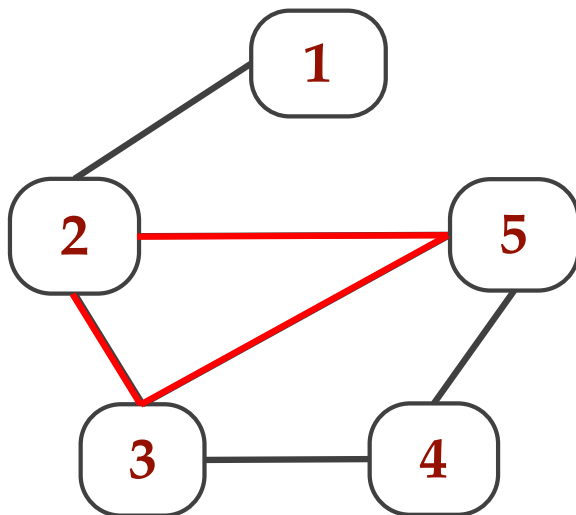
Non ci sono cammini da 1 a 6, da 6 a 11 o da 9 a 4.

Passeggiate & Cammini

Proposizione: Se esiste una passeggiata da u a v , allora esiste un cammino semplice da u a v .

Dim: Prendiamo un nodo qualsiasi z (diverso dagli estremi) che si **ripete** nella passeggiata: possiamo eliminare tutto il ciclo da z a z tenendo solo z ottenendo un'altra passeggiata più corta da u a v .

Si itera questo procedimento fino a eliminare tutte le ripetizioni. $\square$



Esempio: Dalla passeggiata 1 2 **5** 3 **2** **5** 4 eliminiamo il circuito un rosso, tenendo il solo nodo 5, 1 2 **5** 4 che è un cammino semplice.

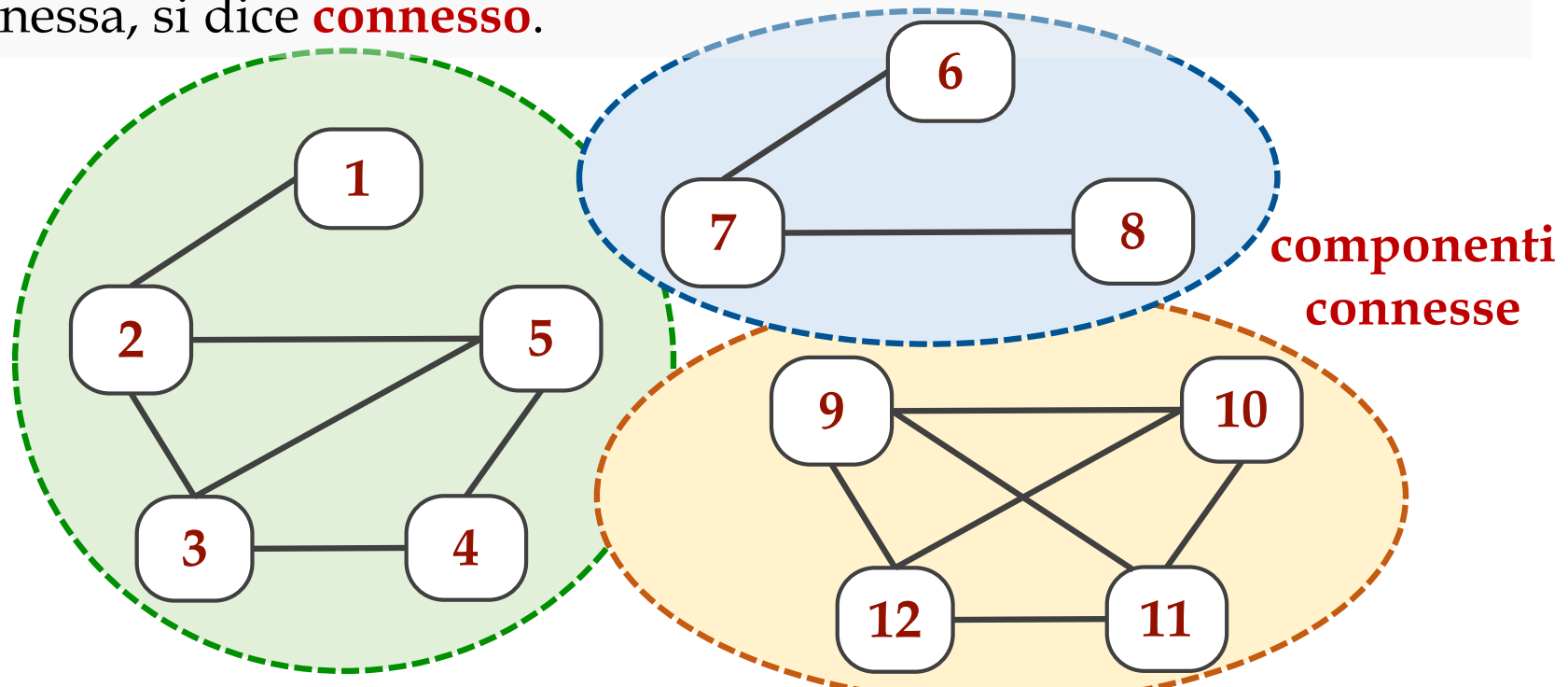
Raggiungibilità e connessione

Un nodo v è **raggiungibile** da u se esiste un cammino da u a v .

Proposizione: In un grafo non orientato, la relazione di **raggiungibilità** è una **relazione di equivalenza** su V .

Dim: è **riflessiva** per il cammino vuoto. È **transitiva** perché giustapponendo due cammini ho un cammino e **simmetrica** perché gli archi si possono percorrere in entrambe le direzioni. $\square$

La classe di equivalenza rispetto alla raggiungibilità si chiama **componente connessa**. Se in un grafo c'è un'unica componente connessa, si dice **connesso**.



Grafi e sottografi

Dato un grafo $G = (V, E)$, diremo che un grafo $G' = (V', E')$ è **sottografo** di G se ho che $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

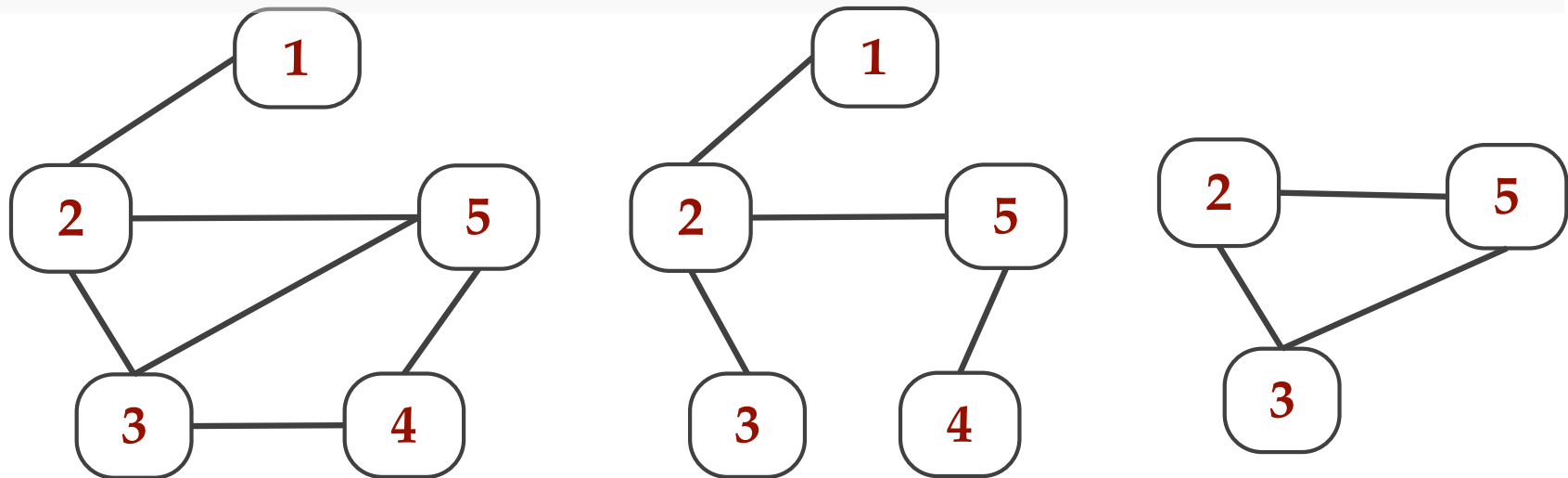
Dato G e un sottoinsieme $V' \subseteq V$ di nodi, chiamiamo il grafo (V', E') dove $E' = \{(u, v) \mid u, v \in V'\}$ il **sottografo indotto** da V' .

Viceversa se $G' = (V', E')$ è sottografo di $G = (V, E)$ e $V = V'$ diremo che G' è un **sottografo ricoprente**.

Esempi: La componente connessa di un nodo $v \in V$ è il sottografo indotto dai nodi raggiungibili da v .

Al centro, un **sottografo ricoprente** (minimo) del grafo a sinistra.

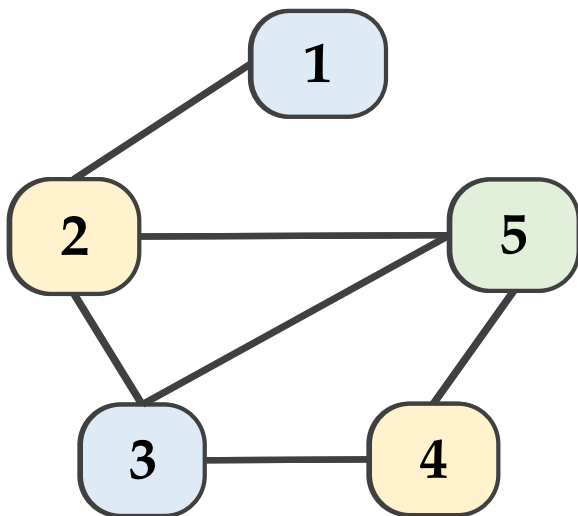
A destra il **sottografo indotto** dai nodi $\{2, 5, 3\}$ del grafo a sinistra.



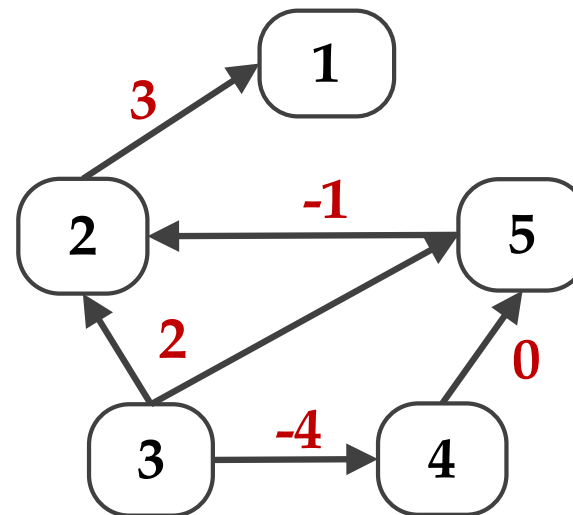
Grafi: variazioni

Nella **modellazione** di molti **problemi**, vengono aggiunte altre informazioni. Ad esempio:

- i **nodi** vengono **colorati**, cioè classificati in un numero finito di classi di equivalenza. $c : V \rightarrow C$ (C insieme finito di colori), usualmente, assegnando **colori diversi** a **nodi adiacenti**.
- gli **archi** vengono **pesati**, con una funzione $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ (o altri insiemi numerici)



grafo colorato.



grafo pesato

Esempio: Colorazione delle Mappe

Un noto problema rimasto aperto per molti anni è: qual è il numero minimo di colori necessari per colorare una carta geografica in modo che **due nazioni adiacenti abbiano colori diversi**?



Può essere modellato come un problema di grafi in cui i **nodi** sono le nazioni...

... gli **archi** connettono nazioni confinanti...

e ci si chiede se il grafo sia **k-colorabile**, in modo che **nodi adiacenti** abbiano **colori diversi**, per un certo k .

Per la cronaca, **bastano 4 colori** per colorare ogni mappa.

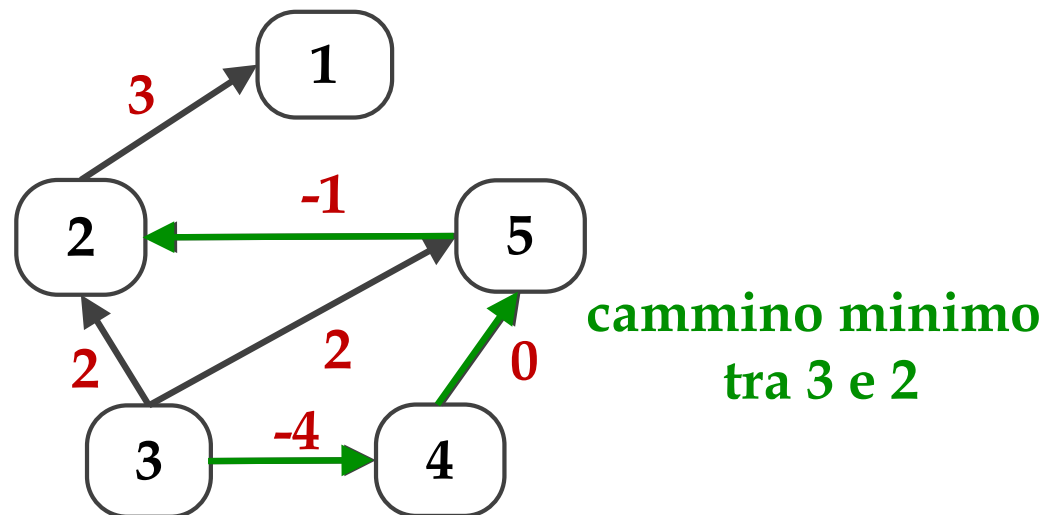
Esempio: Cammini minimi

Un tipico problema legato ai grafi pesati è quello di trovare un **cammino minimo** tra due nodi.

I pesi, in questo caso, rappresentano “**distanze**”.

Nell'esempio siamo in uno strano caso in cui le distanze sono anche **negative** ed evidentemente **non vale disuguaglianza triangolare**.

Può dipendere **dalla natura del problema** che viene modellato con un problema di cammini minimi (non necessariamente un problema di minime distanze in uno spazio euclideo).

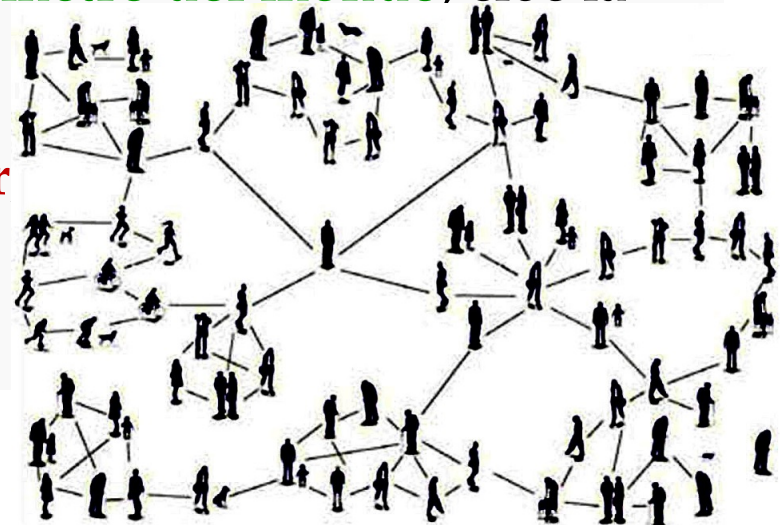


Grafi già visti nel corso...

Tra i problemi visti nel corso, alcuni hanno una naturale modellazione con grafi.

Finding Celebrity (lezione **annullata**): la relazione di **conoscenza** è in effetti una **relazione binaria** (non simmetrica, nel caso in esame). Trovare una celebrità corrisponde a trovare un "**pozzo universale**" cioè un nodo con solo archi entranti, da tutti gli altri nodi. La matrice di conoscenza, altro non è che gli archi di un grafo orientato. La **versione simmetrica** della **relazione di conoscenza** è coinvolta in una famosa congettura nota come i **6 gradi di separazione**: le persone sono i nodi del grafo e c'è un arco se due persone si conoscono reciprocamente. **Qual è il diametro del mondo**, cioè la distanza massima tra due persone?

Nel mondo delle **pubblicazioni scientifiche** si considera l'**Erdos number** cioè la distanza da Paul Erdos secondo la relazione di "essere coautore di un lavoro scientifico".



Grafi già visti nel corso...

Ovviamente anche il problema dei **Matrimoni Stabili** (lezione 20), è un problema spesso ambientato nel mondo dei grafi.

In tal caso, si ha un cosiddetto **grafo bipartito**: l'insieme dei **vertici** è partizionato in **due insiemi disgiunti**, dame e cavalieri, $V = D \cup C$ e gli **archi** sono tutti **tra elementi di D a elementi di C** .

Nella teoria dei grafi, tale problema viene usualmente chiamato **matching** (accoppiamento o abbinamento) e si presenta in varie forme (matching perfetto, di peso minimo etc.).



That's all Folks!

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, **Ivano Salvo**

Esercizi lez. **21(a)** [5/12/23]



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA