Corso di laurea in Matematica
Insegnamento di Informatica generale
Lezioni in modalità mista o a distanza

Il problema dell'ordinamento: algoritmo Heapsort

Giancarlo Bongiovanni
Ivano Salvo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Queste dispense sono state realizzate sulla base delle slide preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni
per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Heapsort - 1

L'algoritmo ***heapsort*** è un algoritmo di ordinamento piuttosto complesso che esibisce ottime caratteristiche:

- come Mergesort ha un costo computazionale di ***O(n log n)*** **anche nel caso peggiore**
- a differenza di Mergesort, **ordina in loco.**

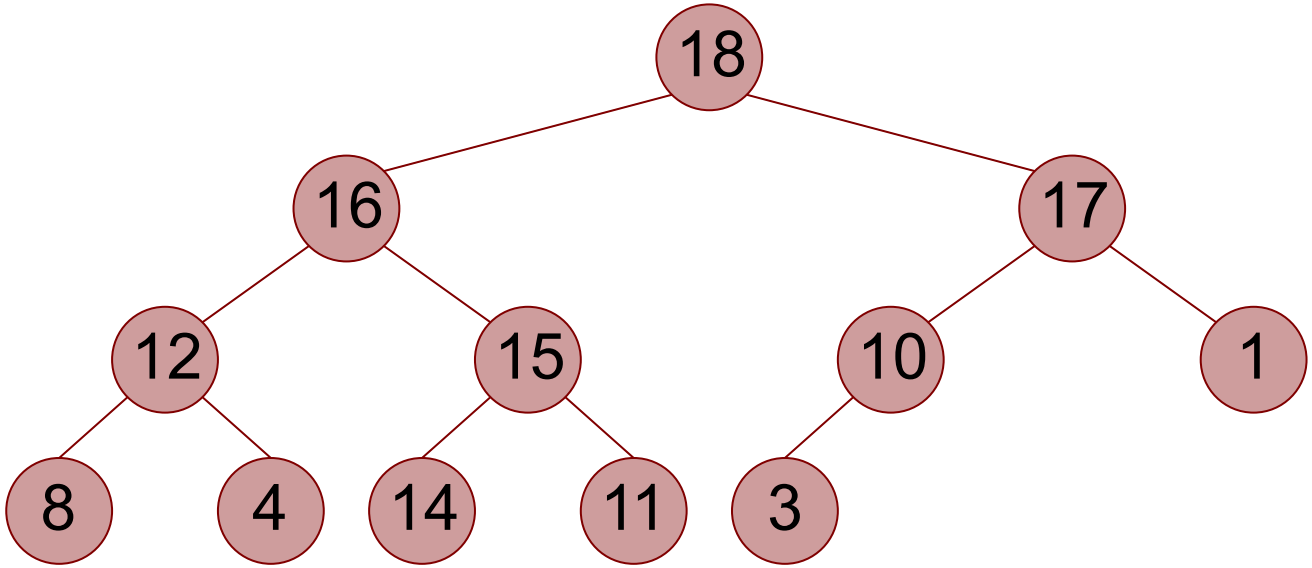
Sfrutta una opportuna organizzazione dei dati, ossia una ***struttura dati***, che garantisce una o più specifiche proprietà, il cui mantenimento è *essenziale* per il corretto funzionamento dell'algoritmo.

⬇

Struttura dati **Heap**

La struttura dati Heap - 1

Uno ***heap*** è un albero binario *completo o quasi completo*, ossia un albero binario in cui tutti i livelli sono pieni, tranne l'ultimo, i cui nodi sono addensati a sinistra…



Con l'ulteriore proprietà che la chiave di ogni nodo è *maggiore o uguale* alla chiave dei suoi figli (proprietà di ordinamento verticale).

La struttura dati Heap - 2

Il modo più naturale per memorizzare uno heap è utilizzare un vettore *A*, con indici che vanno da *1* fino al numero di nodi dello heap, ***heap_size***, i cui elementi possono essere messi in corrispondenza con i nodi dell'heap:

- il vettore è riempito a partire da sinistra; se contiene più elementi del numero *heap_size* di nodi dell'albero, allora i suoi elementi di indice > *heap_size* non fanno parte dell'heap;
- (continua)

La struttura dati Heap - 3

- (continua)
- ogni nodo dell'albero binario corrisponde a uno e un solo elemento del vettore *A*;
- la radice dell'albero corrisponde ad *A[1]*;
- il figlio sinistro del nodo che corrisponde all'elemento *A[i],* se esiste, corrisponde all'elemento A[2i]: ***left(i) = 2i***;
- il figlio destro del nodo che corrisponde all'elemento *A[i],* se esiste, corrisponde all'elemento *A[2i + 1]*: ***right(i) = 2i+1***;
- il padre del nodo che corrisponde all'elemento A[i] corrisponde all'elemento A[$\lfloor i/2 \rfloor$]: ***parent(i)*** **=** $\lfloor i/2 \rfloor$.

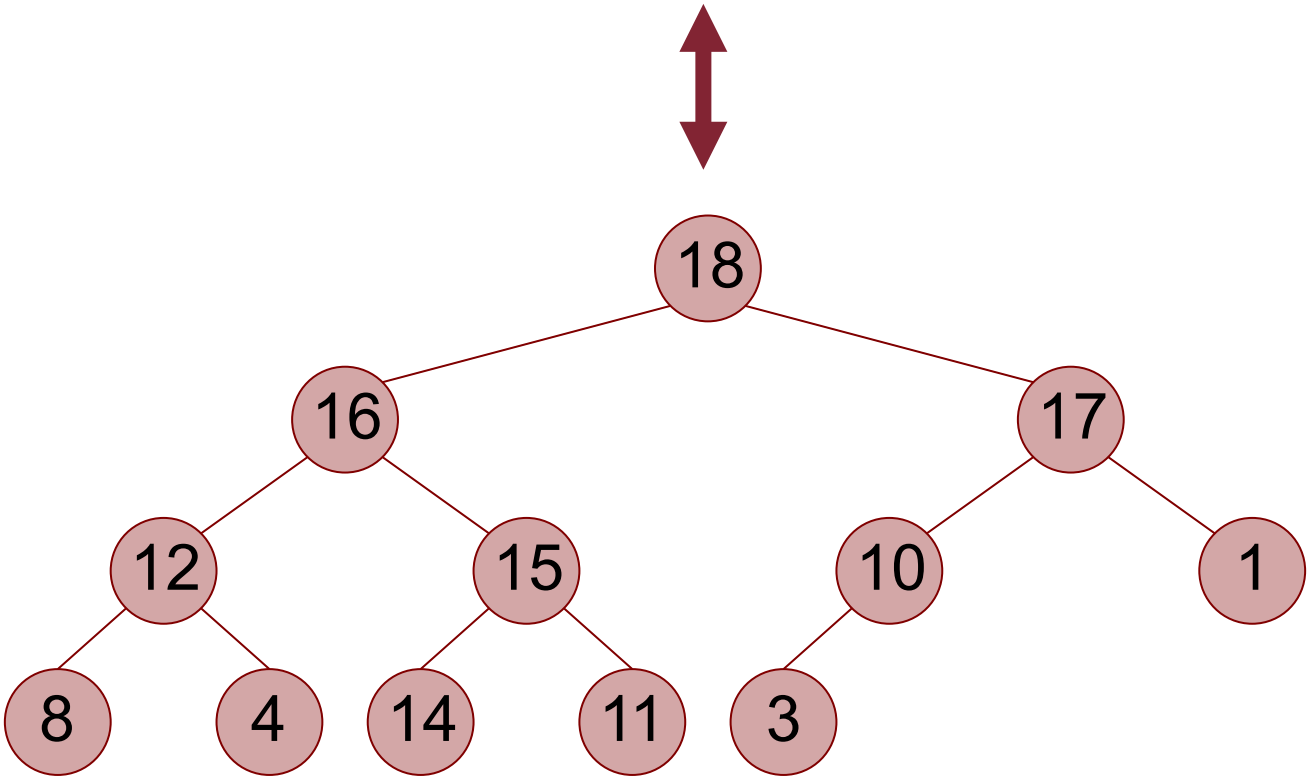
Osserviamo anche che…

Le operazioni *left*(i), *right*(i) e *parent*(i) possono essere eseguite con estrema efficienza nei calcolatori in uso. Infatti:

- *left*(i) è una **moltiplicazione per 2**, che corrisponde in binario a uno **shift verso sinistra** (riempiendo il bit meno significativo con uno **0**)
- *right*(i) è una **moltiplicazione per 2 più 1**, che corrisponde in binario a uno **shift verso sinistra** (riempiendo il bit meno significativo con un **1**)
- *parent*(i) è una **divisione per 2**, che corrisponde in binario a uno **shift verso destra** (riempiendo il bit più significativo con uno 0).

La struttura dati Heap - 4

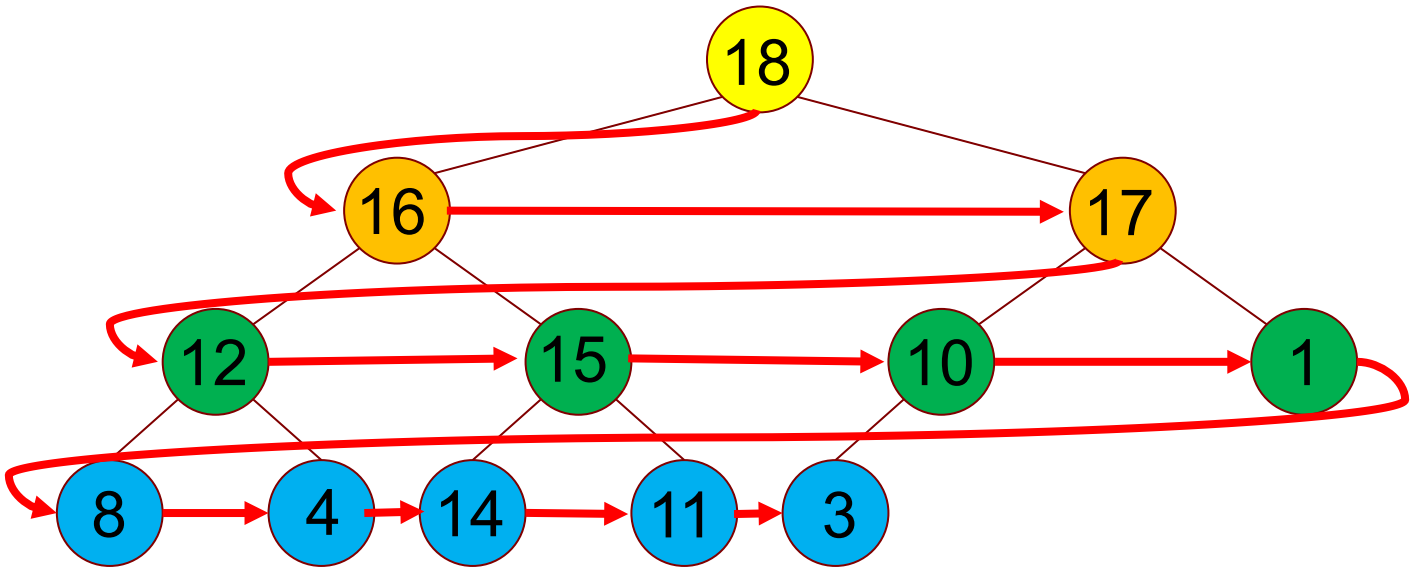
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
18	16	17	12	15	10	1	8	4	14	11	3



La struttura dati Heap - 5

Si noti che scorrere il vettore da sinistra a destra corrisponde a muoversi sull'albero per livelli, dall'alto verso il basso e da sinistra a destra in ciascun livello

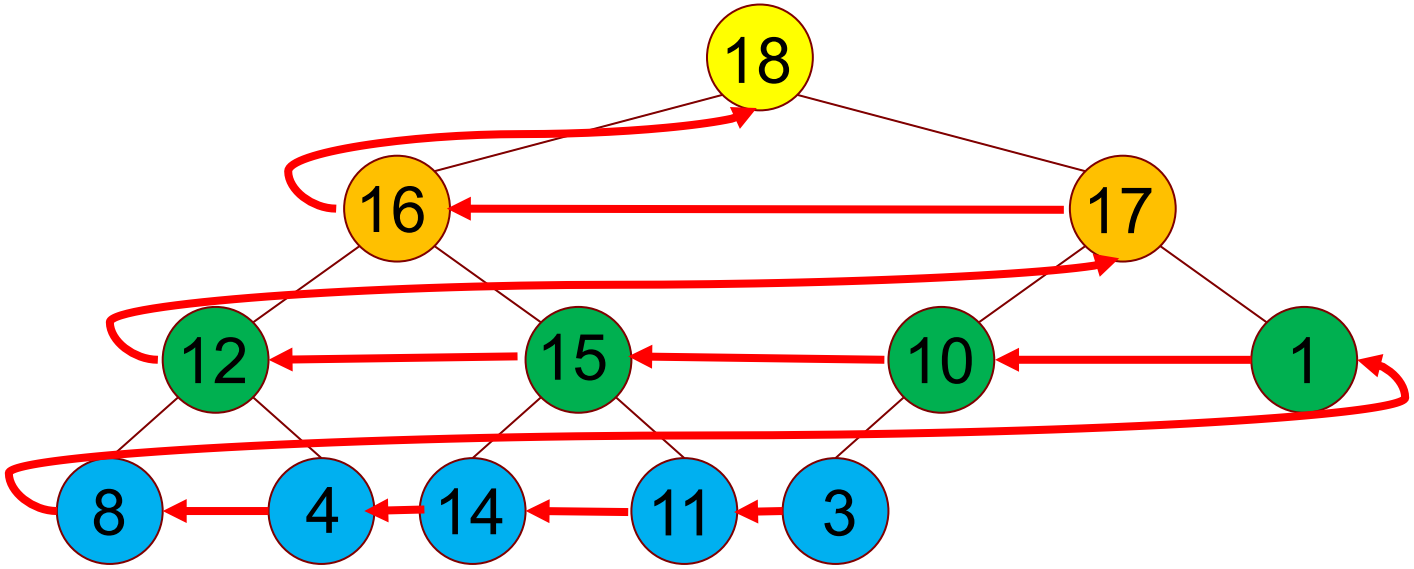
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
18	16	17	12	15	10	1	8	4	14	11	3



La struttura dati Heap - 6

Simmetricamente, scorrere il vettore da destra a sinistra corrisponde a muoversi sull'albero per livelli, dal basso verso l'alto e da destra a sinistra in ciascun livello

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
18	16	17	12	15	10	1	8	4	14	11	3



La struttura dati Heap - 7

Proprietà:

- Poiché lo heap ha tutti i livelli completamente pieni tranne al più l'ultimo, la sua altezza è $\Theta(\log n)$.
- Con questa implementazione, la proprietà di ordinamento verticale implica che per tutti gli elementi tranne $A[1]$ (poiché esso corrisponde alla radice dell'albero e quindi non ha genitore) vale:

$$A[i] \leq A[parent(i)].$$

- L'elemento massimo risiede nella radice, quindi può essere trovato in tempo $O(1)$.

Funzione ausiliarie

L'algoritmo Heapsort si avvale di due funzioni ausiliarie, necessarie per il suo corretto funzionamento

- Funzione Heapify
- Funzione Buildheap

Illustreremo tali funzioni prima di descrivere l'algoritmo Heapsort.

Funzione Heapify - 1

La funzione Heapify ha lo scopo di ripristinare la proprietà di heap, sotto l'ipotesi che nell'albero su cui viene fatta lavorare *l'unico nodo che può violare la proprietà di heap sia la radice dell'albero*, che può essere minore di uno o di entrambi i figli.

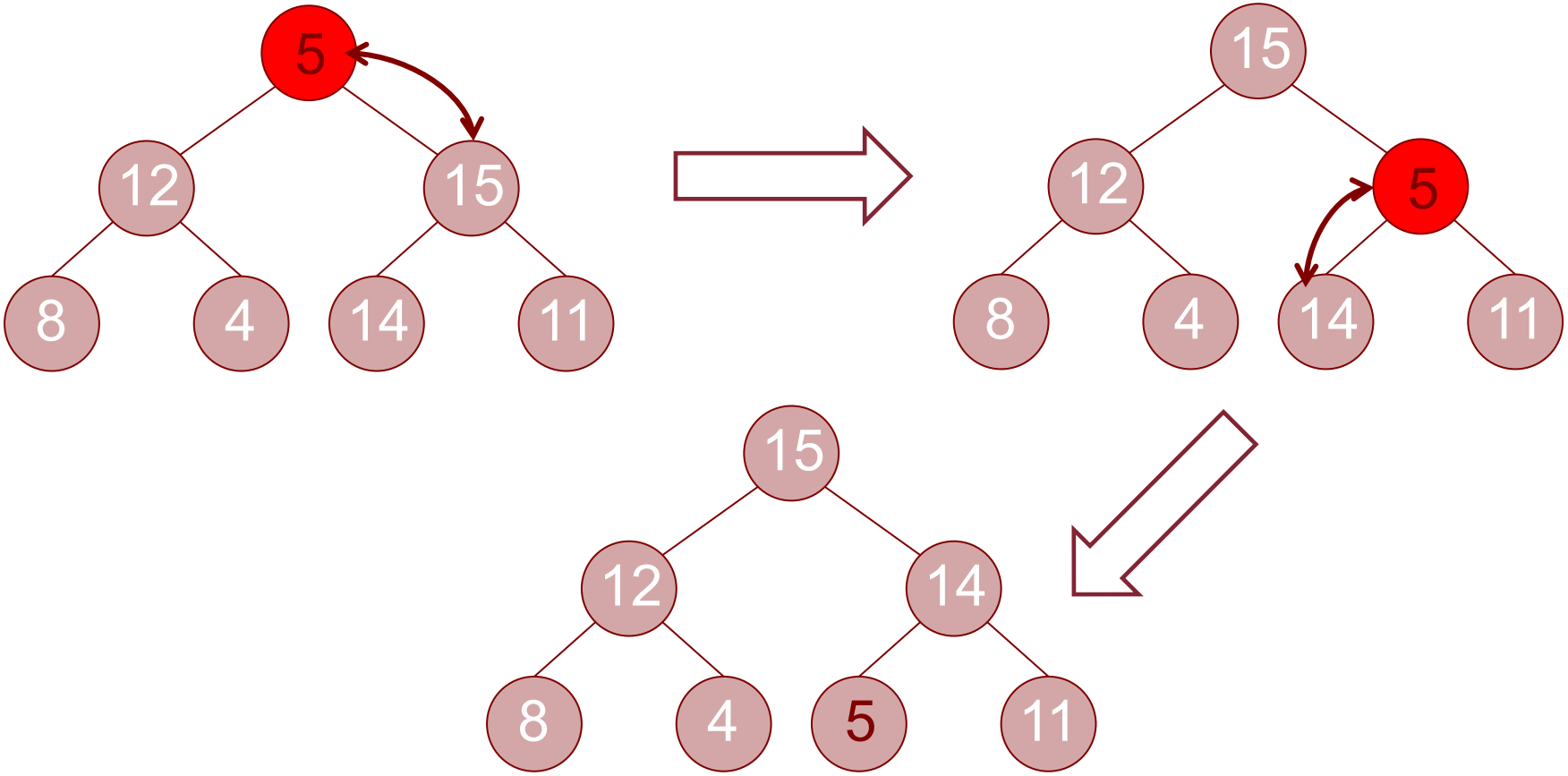
Si noti che questo implica che la proprietà di heap è garantita per entrambi i sottoalberi (sinistro e destro) della radice.

La funzione opera sulla radice confrontandola coi suoi figli e, se necessario, la scambia col maggiore di suoi figli.

Dopo lo scambio si verifica se la violazione si è trasferita sul figlio scambiato e, se necessario, si ripete ricorsivamente l'operazione su tale nodo.

Funzione Heapify - 2

Esempio:



ecc..

Funzione Heapify - 3

```
Funzione Heapify (A: vettore; i: intero)
   L ← left(i); R ← right(i)
   if ((L ≤ heap_size) and (A[L] > A[i]))
      indice_max ← L
   else
      indice_max ← i
   if ((R ≤ heap_size) and (A[R] > A[indice_max]))
      indice_max ← R
   if (indice_max ≠ i)
      scambia A[i] e A[indice_max]
      Heapify (A, indice_max)
   return
```

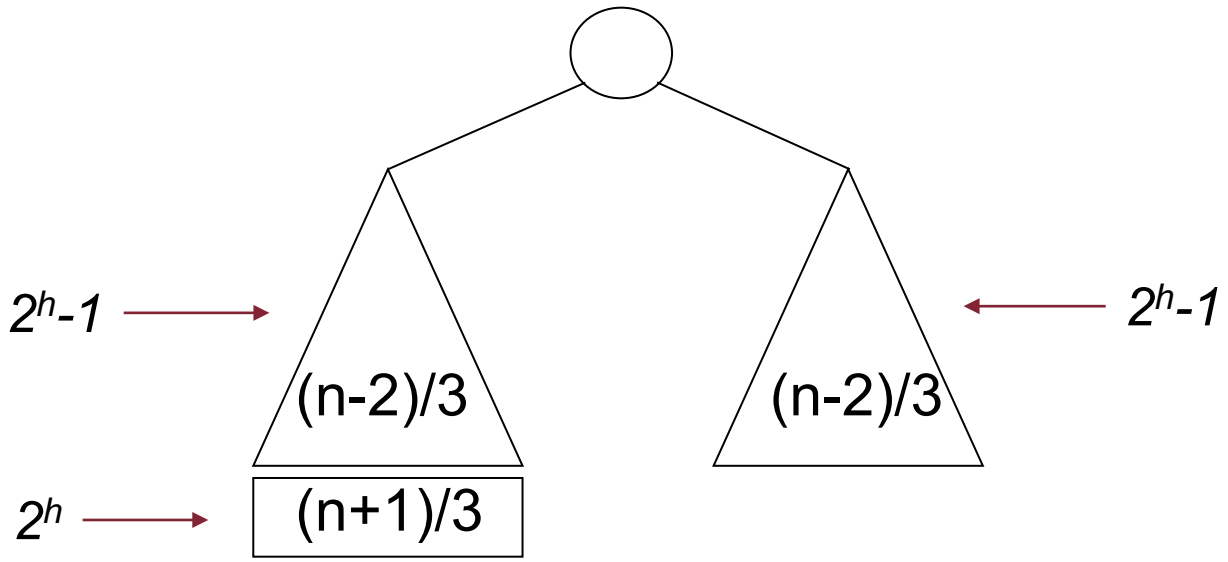
Θ(1)

T(n')

T(n) = *Θ(1)* + T(n'), dove n' è il numero di nodi del sottoalbero che ha più nodi.

Funzione Heapify - 4

I sottoalberi della radice non possono avere più di *2n/3* nodi, situazione che accade quando l'ultimo livello è pieno esattamente a metà:



Quindi l'equazione di ricorrenza diventa $T(n)=T(2/3\ n)+\Theta(1)$, *che ha soluzione:*

$$T(n)=O(\log n)$$

Funzione Buildheap - 1

La funzione Buildheap serve per trasformare qualunque vettore contenente *n* elementi in uno heap, chiamando ripetutamente Heapify sugli opportuni nodi dello heap.

Osservazioni:

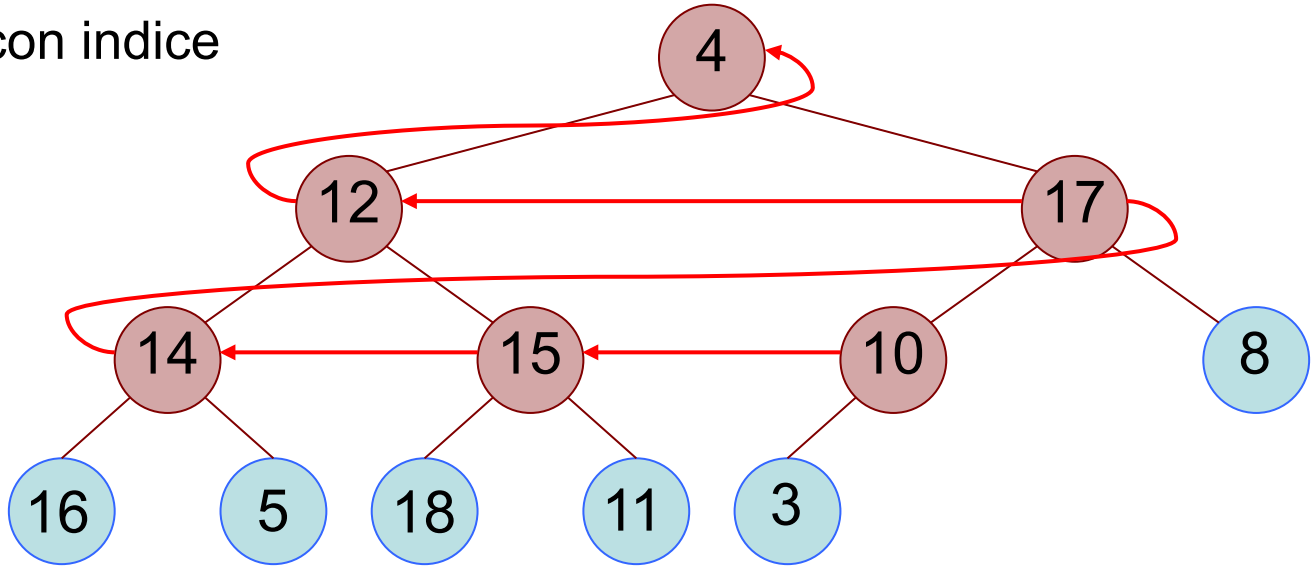
- poiché Heapify presuppone che entrambi i sottoalberi della radice siano heap, deve essere chiamata scorrendo l'albero per livelli dal basso verso l'alto (quindi, sul vettore, da destra a sinistra);
- ogni foglia è già uno heap, quindi basta chiamare Heapify a partire dal nodo interno più a destra, che ha indice:

$$\lfloor n/2 \rfloor$$

Funzione Buildheap - 2

```
Funzione Build_heap (A: vettore)
   for i = ⌊n/2⌋ downto 1
      Heapify (A, i)
   return
```

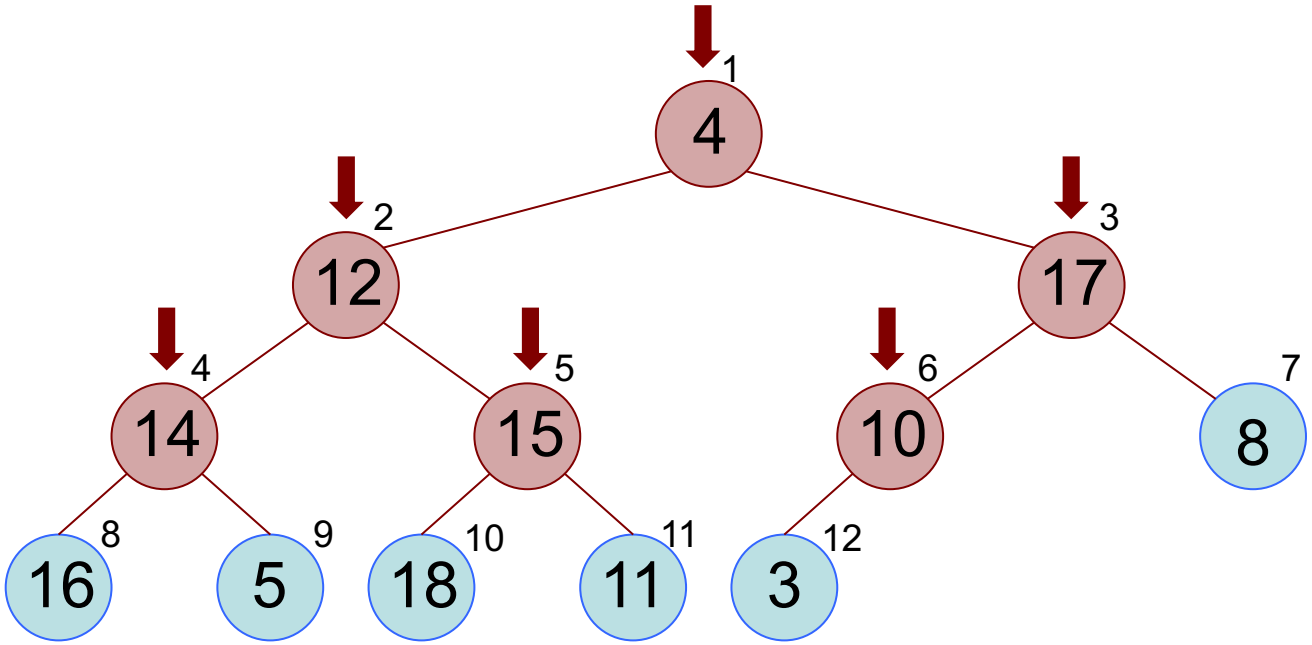
In questo esempio, Buildheap chiama Heapify sui nodi con indice 6, 5, 4, 3, 2, 1:



Funzione Buildheap - 3

```
Funzione Build_heap (A: vettore)
   for i = ⌊n/2⌋ downto 1
      Heapify (A, i)
   return
```

i=[redacted]



Funzione Buildheap - 4

```
Funzione Build_heap (A: vettore)
   for i = ⌊n/2⌋ downto 1
      Heapify (A, i)
   return
```

La funzione Build_heap effettua $\Theta(n)$ chiamate di Heapify, che sappiamo avere ciascuna costo $O(\log n)$, quindi:

$$T(n) = O(n \log n)$$

Con un calcolo più accurato si può mostrare che $T(n)=\Theta(n)$

Funzione Buildheap - 5

Mostriamo che *T(n)=O(n).*

- Il tempo richiesto da Heapify applicata ad un nodo che è radice di un albero di altezza *h* è *O(h)* per quanto già detto;
- il numero di nodi che sono radici di un sottoalbero di altezza *h* è al massimo $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$.

Quindi possiamo scrivere

Se |x| < 1:

$$\sum_{h=0}^{\infty} hx^h = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$T(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor log\, n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left(\frac{n}{2} \sum_{h=0}^{\lfloor log\, n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$

Ricordando che $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \sum_{h=0}^{\infty} h \left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

Otteniamo:

$$T(n) = O\left(\frac{n}{2} \sum_{h=0}^{\lfloor log\, n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right) \leq O\left(\frac{n}{2} \sum_{h=0}^{\infty} h \left(\frac{1}{2}\right)^h\right) = O\left(\frac{n}{2} 2\right) = O(n)$$

Funzione Heapsort - 1

Vediamo ora il funzionamento di Heapsort.

- Trasforma un vettore *A* di dimensione *n* in uno heap (di *n* nodi), mediante Build_heap.
- Ora il max del vettore è in *A[1]* e, per metterlo nella corretta posizione dell'ordinamento, basta scambiarlo con *A[n]*.
- La dim. dell'heap viene ridotta ad *(n – 1)*, e:
  - i due sottoalberi della radice sono ancora degli heap
  - solo la nuova radice (ex foglia più a destra) può violare la proprietà del nuovo heap di dimensione (n – 1).
- Ripristina la proprietà di heap sui residui *(n – 1)* elementi con Heapify;
- Scambia il nuovo max *A[1]* col penultimo elemento;
- Riapplica il procedimento riducendo via via la dimensione dell'heap a *(n – 2), (n –3),* ecc., fino ad arrivare a 2.

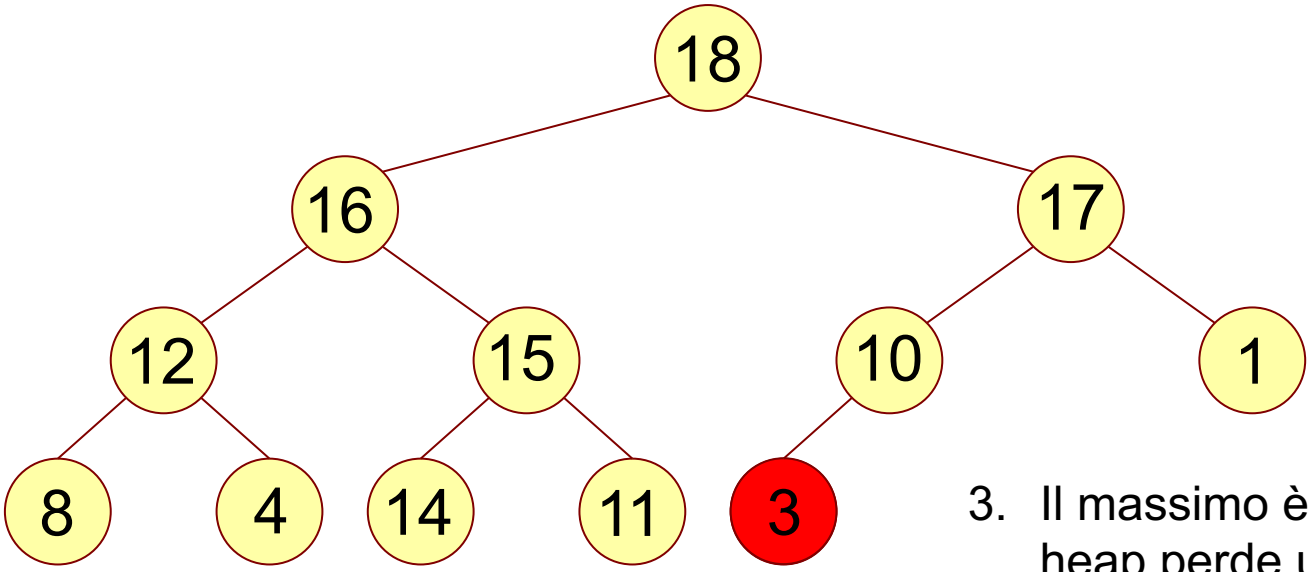
Esempio di Heapsort - 1

Prima iterazione, Heap_size= 12

1. Scambio del massimo:

18	16	17	12	15	10	1	8	4	14	11	3

2. Lavoro di Heapify (su 11 elementi):



3. Il massimo è a posto, lo heap perde un elemento

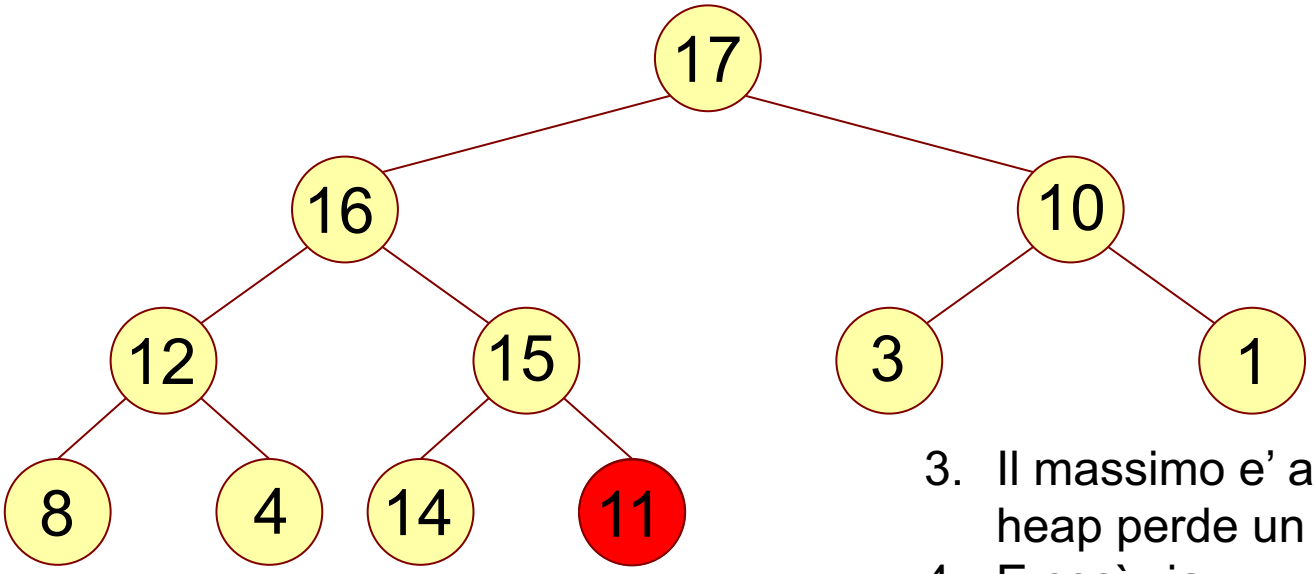
Esempio di Heapsort - 2

Seconda iterazione, Heap_size= 11

1. Scambio del massimo:

17	16	10	12	15	3	1	8	4	14	11	18

2. Lavoro di Heapify (su 10 elementi):



3. Il massimo e' a posto, lo heap perde un elemento
4. E così via…

Heapsort - 9

Vediamo ora lo pseudocodice di Heapsort:

```
Funzione Heapsort (A: vettore)
   Build_heap(A)                          O(n)
   for heap_size = n downto 2             (n-1) iterazioni + Θ(1)
      scambia A[1] e A[heap_size]         Θ(1)
      Heapify(A, heapsize-1, 1)           O(log n)
   return                                 Θ(1)
```

$$T(n) = O(n) + (n-1)(\Theta(1) + O(\log n)) + \Theta(1) + \Theta(1) = O(n \log n)$$

Corso di laurea in Matematica
Insegnamento di Informatica generale
Lezioni a distanza

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esercizi

- Progettare un algoritmo che, dato in input un vettore che rappresenta un heap, restituisca il valore minimo. Fare le opportune considerazioni sul costo computazionale

- Un Heap minimo è un albero binario completo o quasi completo con la proprietà che la chiave su ogni nodo è minore o uguale alla chiave dei suoi figli. Si modifichi l'algoritmo di Heap sort in modo che la struttura dati di riferimento sia un heap minimo e non un heap.