Attività di Alternanza Scuola-Lavoro
Roma, 15 Febbraio 2023

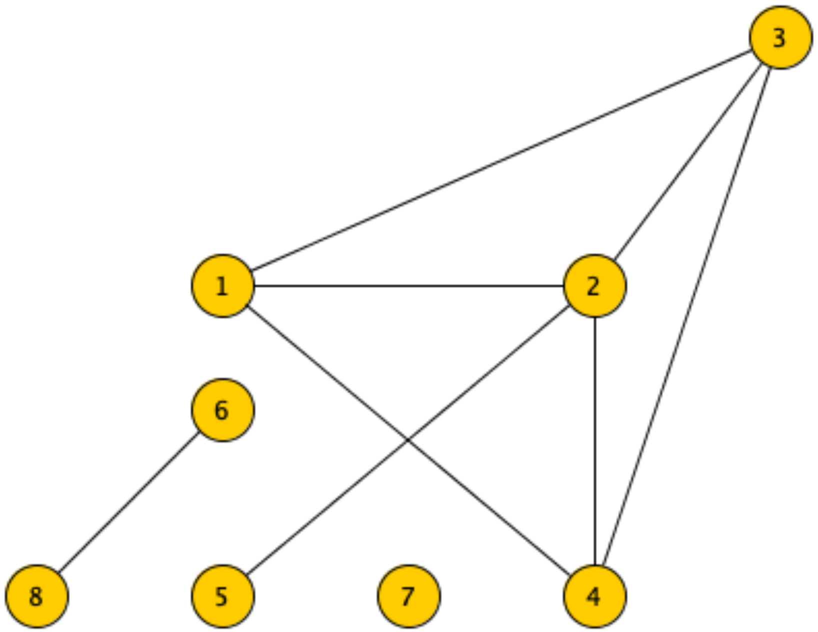
I grafi

Angelo Monti
Professore Associato del Dipartimento di Informatica
Sapienza Università di Roma

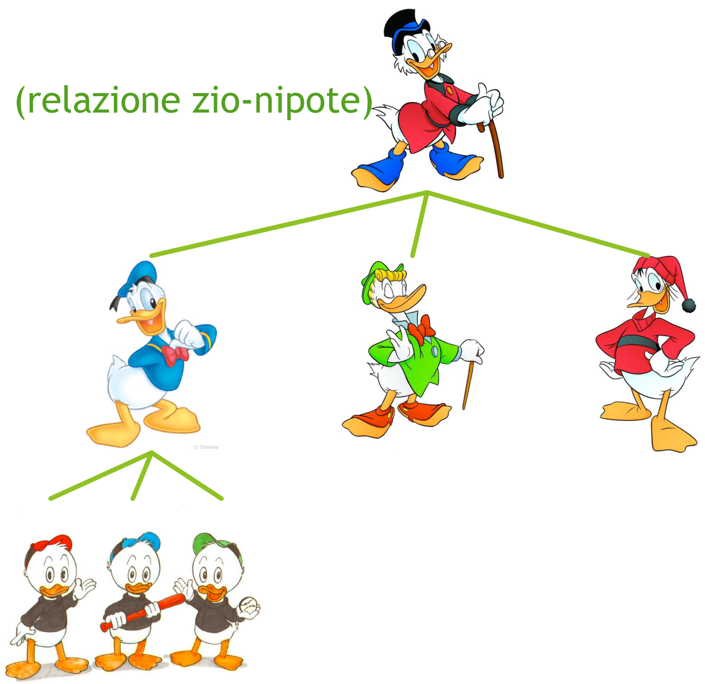
- Dato un certo problema della vita reale, vogliamo modellare la situazione nel modo più preciso possibile e risolvere il problema tramite un algoritmo efficiente.

- Per molti problemi, un buon modello è rappresentato da un grafo.

- Cos’è un grafo?

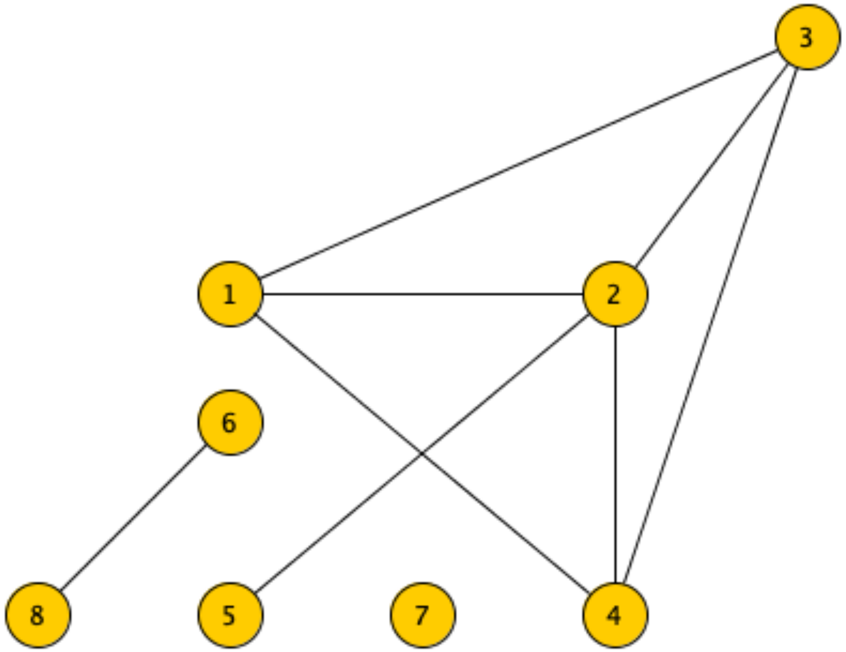


- E’ un oggetto (matematico) costituito da un insieme di entità, dette nodi……
- ed un insieme di coppie di nodi, dette archi.



Ogni situazione che ha a che fare con degli oggetti che sono legati tra loro da relazioni (binarie) si può rappresentare con un grafo.

Per questo, i grafi servono a modellare innumerevoli situazioni della vita reale…

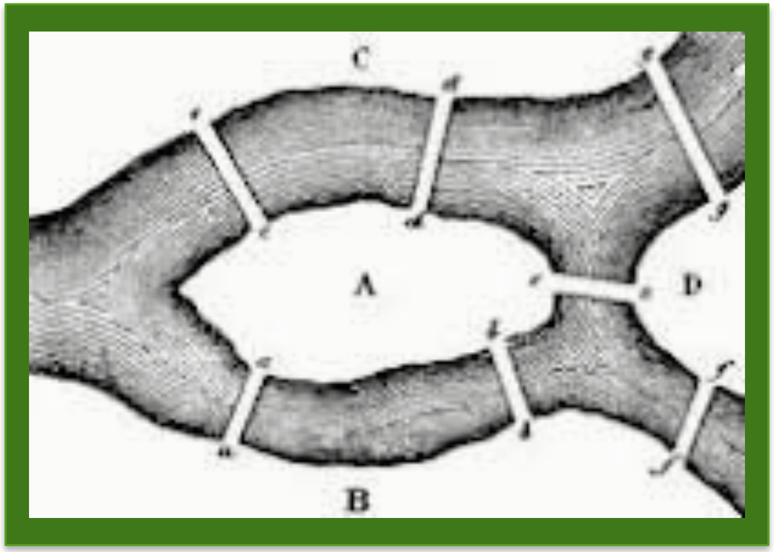


Un po' di terminologia:

- Il grado di un nodo è il numero di archi che incidono su quel nodo.
- Un circuito del grafo è una sequenza di archi che inizia e termina nello stesso nodo.

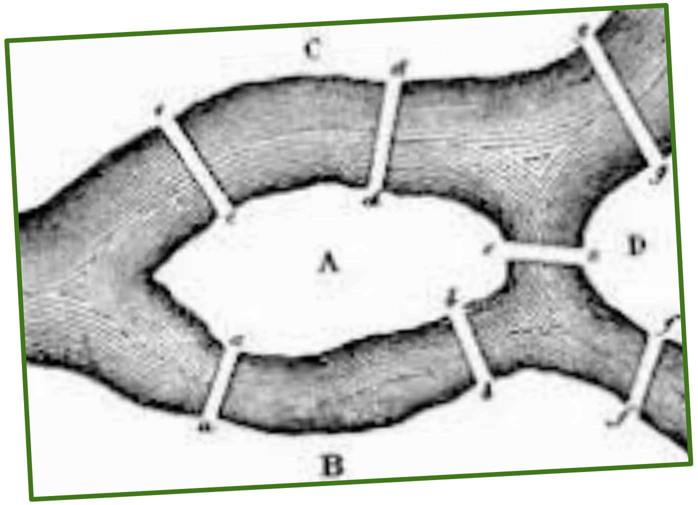
Tutto cominciò nel 1736…

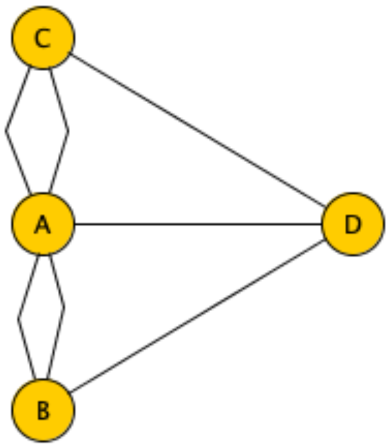
… durante le sue passeggiate per la città di Königsberg sulle sponde del fiume Pregel, Eulero si chiese se fosse possibile fare una passeggiata partendo da casa, percorrere tutti i ponti una ed una sola volta e rincasare.



Questo è il famoso **problema dei ponti di Königsberg.**

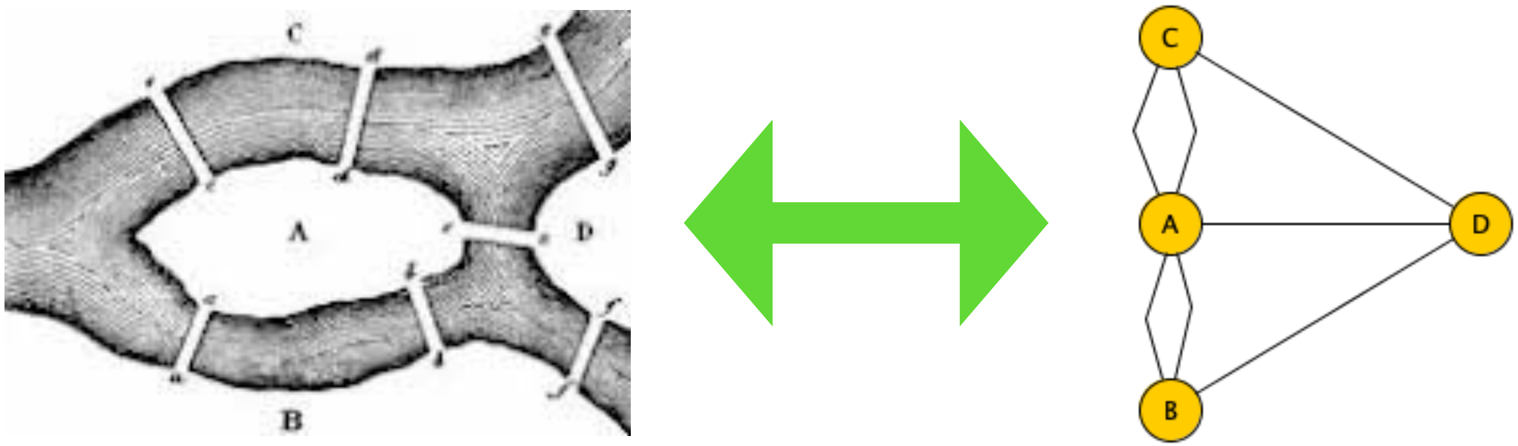
Eulero modella il suo problema come problema su grafi:





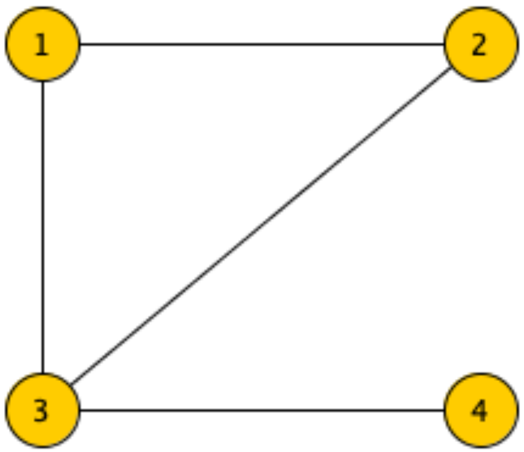
Un grafo G si dice **euleriano** se è possibile trovare un circuito che passi una ed una sola volta per ciascuno dei suoi archi.

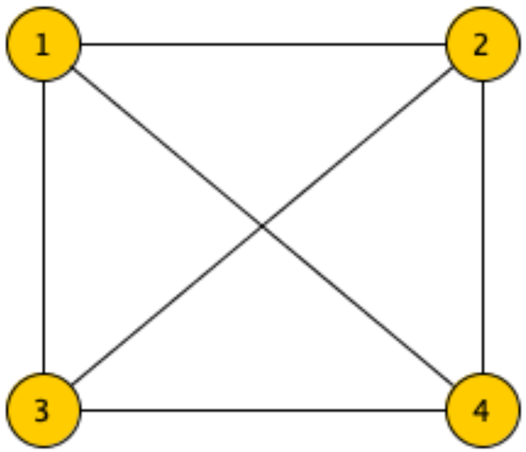
Teor. di Eulero (1736). Un grafo *G* è euleriano se e solo se il grado di ciascuno dei suoi nodi è pari.

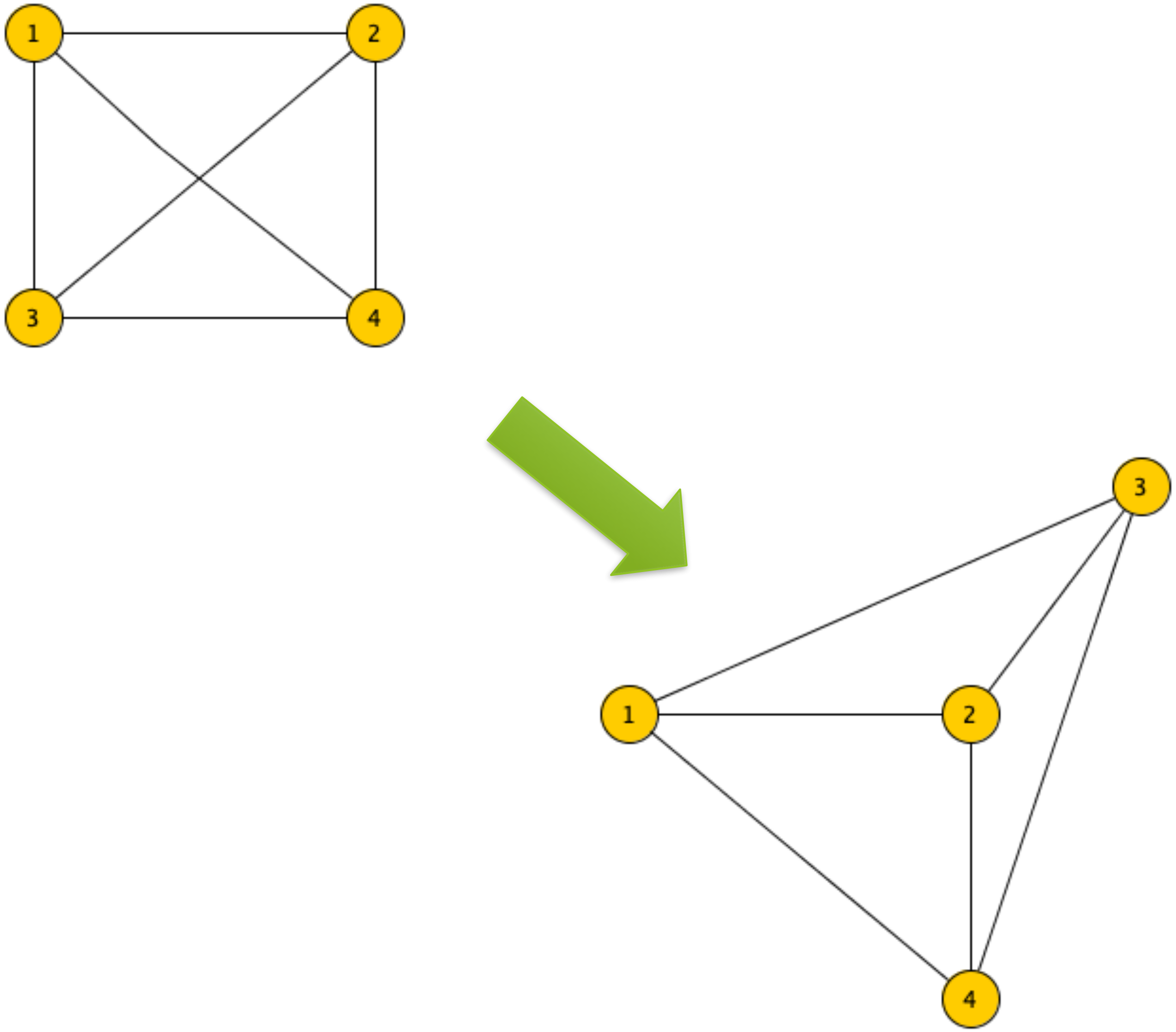


Non è possibile…

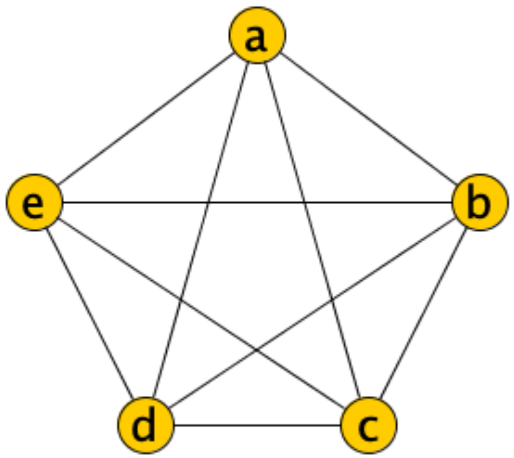
- Un **grafo** si dice **planare** se è possibile rappresentarlo sul piano in modo che le linee che rappresentano gli archi non si incrocino tra loro.

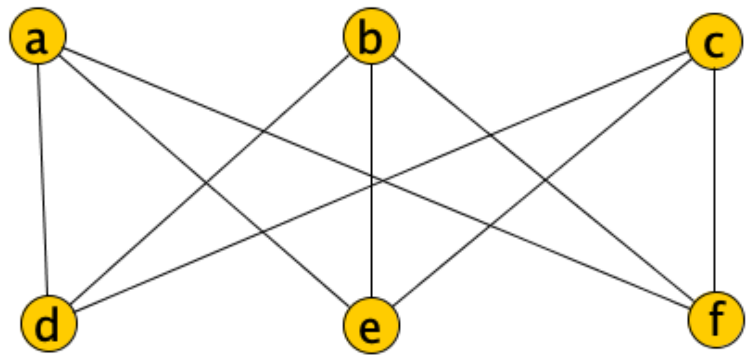


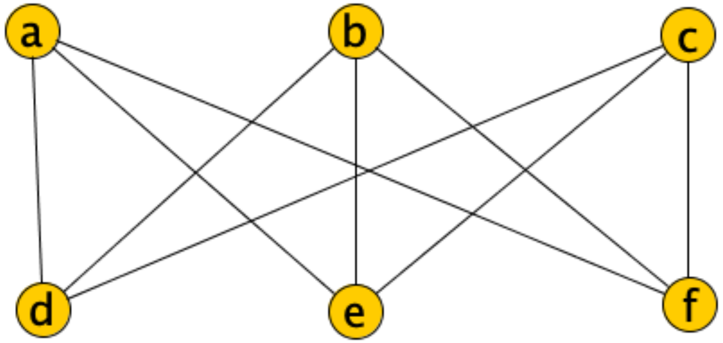


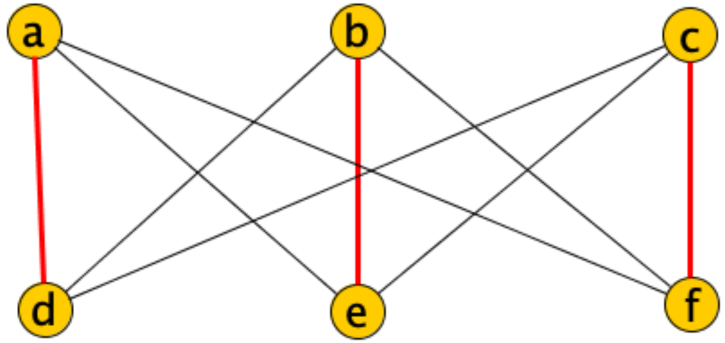

1
2
3
4
1
2
3
4

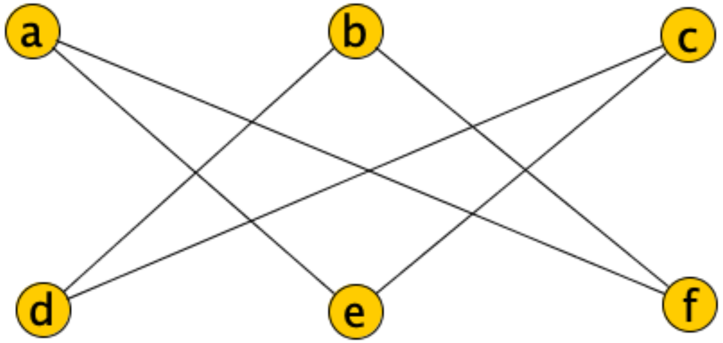
- Non tutti i grafi sono planari:

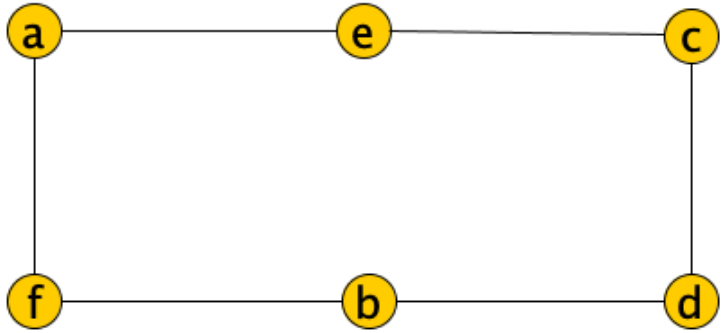


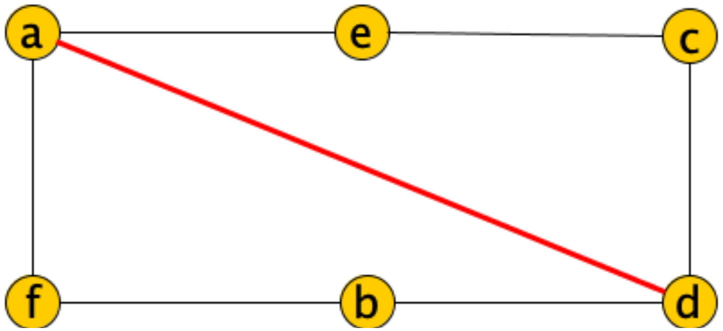


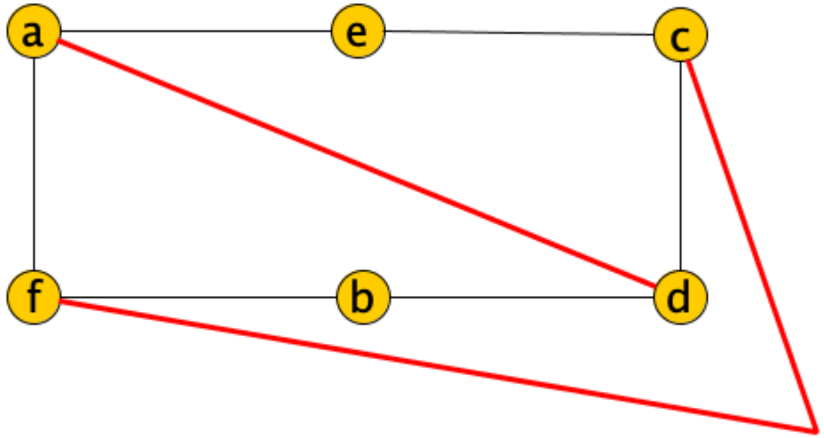

a
b
c
d
e
f

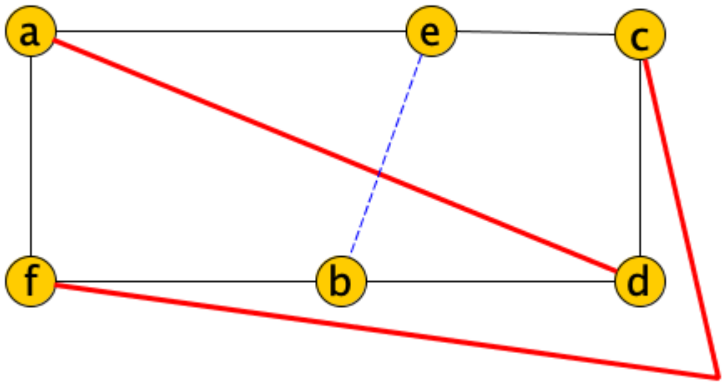

a
b
c
d
e
f

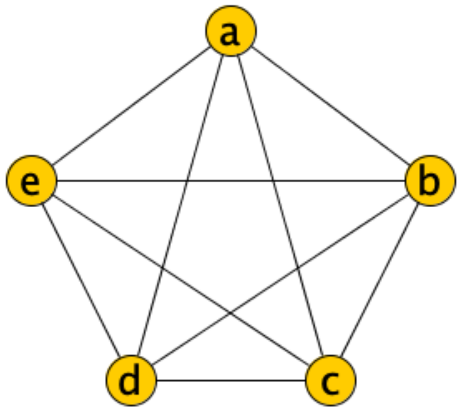

a
b
c
d
e
f


a
e
c
f
b
d

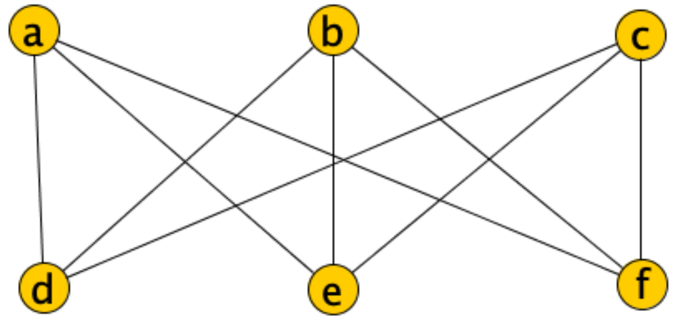

a
e
c
f
b
d


a
e
c
f
b
d


a
e
c
f
b
d



K_5

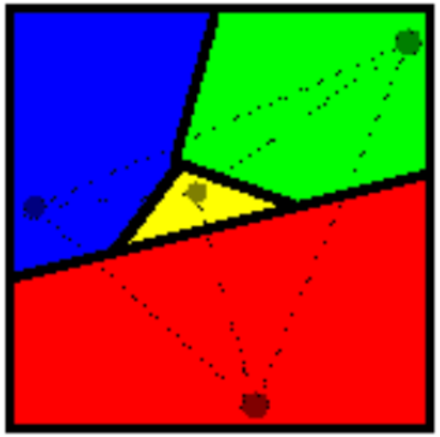


$K_{3,3}$

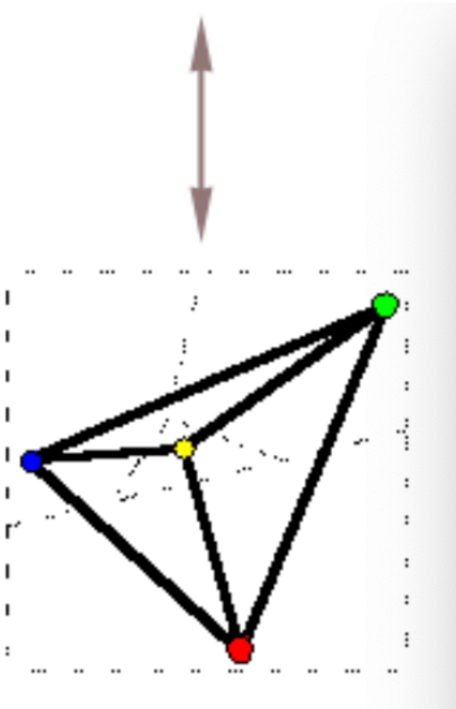
Teor. di Kuratowski (1930). Un grafo *G* è planare se e solo se non contiene alcun sottografo che sia una espansione di K_5 o $K_{3,3}$.

Colorazione di mappe

Quanti colori ci vorranno? Io ne ho solo 4…



- Rappresentiamo ogni regione della mappa con un nodo;
- Aggiungiamo un arco se due nodi/ regioni sono confinanti



- Il problema diventerà quello di colorare i nodi di un grafo planare in modo tale che nodi adiacenti ricevano colori diversi.

- Il problema venne posto per la prima volta nel 1852 da uno studente che congetturò che 4 colori sono sempre sufficienti.

- Negli anni successivi molti matematici tentarono invano di dimostrare la congettura.

- La prima dimostrazione fu proposta solo nel 1879.

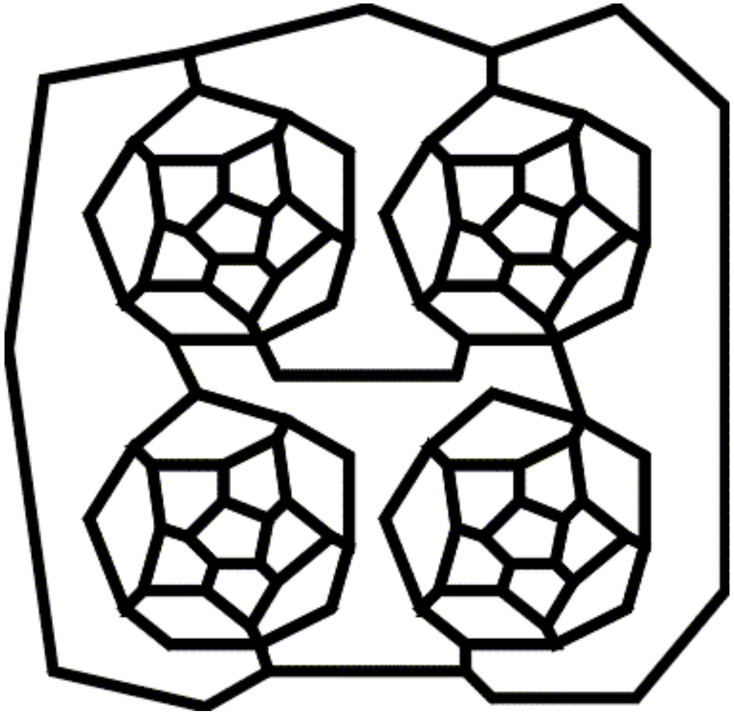
- Solo nel 1890 si scoprì che la dimostrazione conteneva un sottile errore. Si provò almeno che 5 colori sono sempre sufficienti a colorare una mappa.

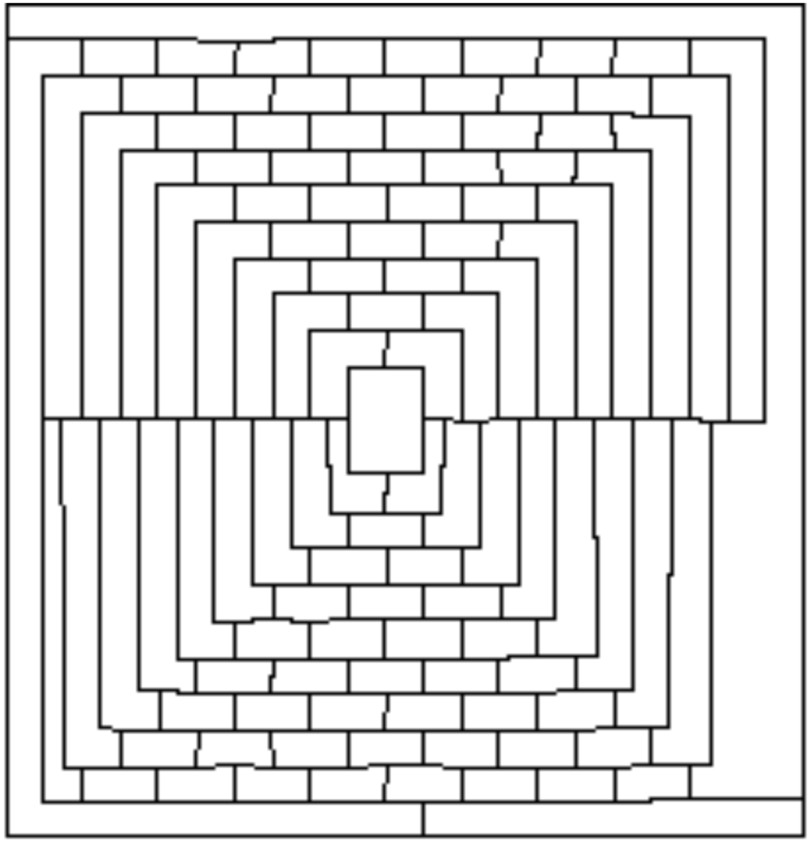
- La dimostrazione che 4 colori son sufficienti fu trovata solo nel 1977. Si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1.936 configurazioni, per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso con l'ausilio di un calcolatore.

- L'utilizzo di un algoritmo per verificare l'esattezza della congettura scatena grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione sia basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti porta alcuni matematici a contestarne la validità: sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibilità di avere la certezza che l'algoritmo sia implementato correttamente. Fino ad oggi nell'algoritmo non è stato trovato alcun errore.

- Nel 2000 è stata proposta una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei gruppi.

Provate a colorare queste 2 mappe con 4 colori:





Nel 1975 Martin Gardner dichiarò di poter dimostrare che questa mappa non si può 4-colorare (Pesce d'Aprile)

Soluzioni: