Es. 2.

Si consideri il problema PART: dato un insieme S di *n* interi, si determini se esistono due sottoinsiemi *A* e *B* tali che

$A \cup B = S$,

$A \cap B = \varnothing$, e

$\sum_{a \text{ in } A} a = \sum_{b \text{ in } B} b$

Un'istanza di PART è <S>, dove S è un insieme di interi.

Si dimostri che questo problema è NP-completo.

Per la riduzione si parta da SubSUM: dato un insieme X di interi positivi e un intero positivo t si determini se c'è un sottoinsieme di X, A, la cui somma degli elementi sia t. Un'istanza di SubSUM è <S,t> dove S è un insieme di interi e t un intero.

SubSUM è NP-completo.

Mostriamo come produrre la riduzione in due modi.

Modo 1.

Per costruire la riduzione immaginiamo di partire da un'istanza sì di SubSum, in tal caso S ha un sottoinsieme A i cui elementi danno somma t. Il complemento di A, B, è un buon candidato per una partizione a parte il fatto che gli elementi di A hanno somma k - t, se k è la somma di tutti gli elementi di S. Potremmo però aggiungere un elemento a S per fare in modo che i due sottoinsiemi diano la stessa somma, t. Poichè k - t + 2t - k = t, aggiungiamo 2t-k a S, per ottenere l'istanza di PART da associare a quella di SubSum.

Cioè consideriamo la riduzione <S> $\mapsto$ <S'>, dove S' = S $\cup$ {2t-k} e otteniamo che A e il suo complemento sono una partizione di S' in due sottoinsiemi a somma uguale, t.

Verifichiamo nel caso delle istanze no. Per semplicità considero un'istanza sì di PART e vedo se ottengo un'istanza sì di SubSum. Se S' è un sottoinsieme partizionabile in due sotto insiemi A e B nel modo richiesto, vuol dire che, posto $s = \sum_{a \text{ in } A} a$, si ha $s = \sum_{a \text{ in } A} a = \sum_{b \text{ in } B} b$ e quindi 2s = k + 2t - k, perchè la somma degli elementi di S è k, ma in S' c'è anche 2t-k. Quindi s = t.

Possiamo supporre che 2t-k sia in A. Allora B è un sottoinsieme di S e la somma dei suoi elementi è t. In conclusione possiamo dire che la funzione associa istanze sì di PART a istanze sì di SubSum, o equivalentemente istanze no di SubSum a istanze no di PART.

Modo 2:
Per costruire la riduzione immaginiamo di partire da un'istanza sì di SubSum, in tal caso S ha un sottoinsieme A i cui elementi danno somma t. Il complemento di A, B, è un buon candidato per una partizione a parte il fatto che gli elementi di A hanno somma k - t, se k è la somma di tutti gli elementi di S. Potremmo però aggiungere un elemento a S per fare in modo che i due sottoinsiemi diano la stessa somma, k - t. Poichè t + k - 2t = k - t, aggiungiamo k-2t a S, per ottenere l'istanza di PART da associare a quella di SubSum. Cioè consideriamo la riduzione <S> ↦ <S'>, dove S' = S ∪ {k-2t} e otteniamo che A e il suo complemento sono una partizione di S' in due sottoinsiemi a somma uguale, k-t.

Verifichiamo nel caso delle istanze no. Per semplicità considero un'istanza sì di PART e vedo se ottengo un'istanza sì di SubSum. Se S' è un sottoinsieme partizionabile in due sottoinsiemi A e B nel modo richiesto, vuol dire che $\sum_{a \text{ in } A} a = \sum_{b \text{ in } B} b$. Sia $s = \sum_{a \text{ in } A} a$ e quindi 2s = k + k - 2t, perchè la somma degli elementi di S è k, ma in S' c'è anche k-2t. Quindi s = k-t.

Poichè in uno dei due insiemi c'è k-2t e possiamo supporre che sia A, allora A - {k-2t} è un sottoinsieme di S e la somma dei suoi elementi è k - t - (k-2t) = k- t - k + 2t = t, quindi possiamo dire che la funzione associa istanze sì di PART a istanze sì di SubSum, o equivalentemente istanze no di SubSum a istanze no di PART.