

# Sommario

**Proprietà indecidibili delle TM.**

**Proprietà non Turing riconoscibili delle TM.**

# INFIN<sub>TM</sub>

Il problema dell'infinito per le TM:

$INFIN_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ è in TM e } L(M) \text{ è infinito} \}$  è deciso da qualche TM?

Prova della non decidibilità:

Per riduzione da  $A_{TM}$ ,  $A_{TM} \leq_m INFIN_{TM}$ .

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T \rangle$ , dove  $T$  è una TM, in modo tale che  $w$  è in  $L(M)$  ( $\langle M, w \rangle$  è in  $A_{TM}$ ) sse  $L(T)$  è infinito (e quindi  $\langle T \rangle$  è in  $INFIN_{TM}$ ).

Adottiamo l'alfabeto binario.

La riduzione è calcolata dalla TM  $R$  seguente.

$R = \text{Input: } \langle M, w \rangle$

$\text{Output: } \langle T \rangle$  dove la TM  $T$  è così definita:

$T = \text{input } x$

esegui  $M$  su  $w$  e

se  $M$  accetta  $w$ , accetta  $x$

se  $M$  rifiuta  $w$ , rifiuta  $x$ .

Se  $M$  accetta  $w$  allora  $T$  accetta  $\{0,1\}^*$ , mentre se  $M$  non accetta  $w$  allora  $L(T) = \emptyset$ , perché o  $M$  ha rifiutato  $w$  o  $M$  non si è fermata su  $w$ , in entrambi i casi  $T$  non accetta alcuna parola, quindi abbiamo ottenuto la riduzione  $f$  voluta:  
 $w$  è in  $L(M)$  ( $\langle M, w \rangle$  è in  $A_{TM}$ ) sse  $(f(\langle M, w \rangle) = \langle T \rangle$  è in  $INFIN_{TM})$   $L(T)$  è infinito.

# Regolarità per TM

$REG_{TM} = \{ \langle T \rangle \mid T \text{ è una TM e } L(T) \text{ è regolare} \}$  è indecidibile.

Prova. Per riduzione da  $A_{TM}$ . Mostriamo che  $A_{TM} \leq_m REG_{TM}$ .

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T \rangle$ , dove  $T$  è una TM, in modo tale che  $w$  è in  $L(M)$  ( $\langle M, w \rangle$  è in  $A_{TM}$ ) sse  $L(T)$  è regolare (e quindi  $\langle T \rangle$  è in  $REG_{TM}$ ). Questa associazione è calcolabile, e sia  $R$  la macchina che la calcola.

La TM  $R$  è così definita:

input  $\langle M, w \rangle$

output: la TM  $T$  qui definita:

$T = \text{input } x$

se  $x = 0^n 1^n$ , per qualche  $n$ , allora accetta

altrimenti ( $x$  non è della forma  $0^n 1^n$ ) esegui  $M$  su  $w$  e

se  $M$  accetta  $w$ , accetta  $x$

se  $M$  rifiuta  $w$ , rifiuta  $x$ .

Adottiamo l'alfabeto binario.

Quindi  $L(T)$  accetta tutte le parole se  $M$  accetta  $w$ :

quelle della forma  $0^n 1^n$  in ogni caso, quando le riceve in input, e le altre se  $M$  accetta  $w$ .

Se invece  $M$  non accetta  $w$  le uniche parole accettate da  $T$  sono quelle della forma  $0^n 1^n$ , per qualche  $n$ .

Quindi  $L(T)$  è regolare ( $\langle T \rangle$  è in  $REG_{TM}$ ) sse  $M$  accetta  $w$  ( $\langle M, w \rangle$  è in  $A_{TM}$ ).

# Non Turing riconoscibilità

Il problema dell'equivalenza per TM:

$EQ_{TM} = \{ \langle M, M' \rangle \mid M, M' \text{ sono TM e } L(M) = L(M') \}$  non è Turing riconoscibile.

Osservazione 1: se  $A \leq_m B \Leftrightarrow \neg A \leq_m \neg B$

Osservazione 2:  $A_{TM}$  è Turing riconoscibile mentre  $\neg A_{TM}$  non lo è.

Osservazione 3: Per provare che un qualsiasi problema  $B$  non è Turing riconoscibile dovremmo dimostrare  $\neg A_{TM} \leq_m B$ , ma è più semplice sfruttare l'osservazione 1 e ridurre  $A_{TM}$  al complemento di  $B$ , cioè dimostrare che  $A_{TM} \leq_m \neg B$ .

# Equivalenza: $EQ_{TM}$

$EQ_{TM} = \{ \langle M, M' \rangle \mid M, M' \text{ sono TM e } L(M) = L(M') \}$  non è Turing riconoscibile.

Prova della non Turing riconoscibilità:

Riduciamo  $A_{TM}$  all'inequivalenza, cioè al complemento dell'equivalenza per TM:

$$A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM}.$$

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T1, T2 \rangle$ , la codifica di due TM  $T1$  e  $T2$ , in modo tale che  $w$  è in  $L(M)$  sse  $L(T1) \neq L(T2)$ . Sempre sull'alfabeto binario.

La TM  $T1$  è così definita:  
input x  
rifiuta

$$L(T1) = \emptyset$$

La TM  $T2$  è così definita:  
input x  
esegui  $M$  su  $w$   
se  $M$  accetta  $w$ , accetta  
se  $M$  rifiuta  $w$ , rifiuta.

Se  $w$  è in  $L(M)$  allora  $L(T2) = \{0,1\}^*$   
mentre se  $w$  non è in  $L(M)$  allora  $L(T2) = \emptyset$

# Equivalenza: EQ<sub>TM</sub>

$EQ_{TM} = \{ \langle M, M' \rangle \mid M, M' \text{ sono TM e } L(M) = L(M') \}$  non è Turing riconoscibile.

Prova della non Turing riconoscibilità:

Riduciamo  $A_{TM}$  all'inequivalenza, cioè al complemento dell'equivalenza per TM:

$$A_{TM} \leq_m \neg EQ_{TM}.$$

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T1, T2 \rangle$ , la codifica di due TM  $T1$  e  $T2$ , in modo tale che  $w$  è in  $L(M)$  sse  $L(T1) \neq L(T2)$ . Sempre sull'alfabeto binario.

La riduzione è calcolata dalla TM R seguente.

R = Input:  $\langle M, w \rangle$

Output:  $\langle T1, T2 \rangle$  dove

$T1$  = input  $x$   
rifiuta

$T2$  = esegui  $M$  su  $w$   
se  $M$  accetta  $w$ , accetta  
se  $M$  rifiuta  $w$ , rifiuta.

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta:

$w$  è in  $L(M) \Rightarrow L(T1) = \emptyset \neq L(T2) = \{0,1\}^*$ .

$w$  non è in  $L(M) \Rightarrow L(T1) = \emptyset = L(T2)$ .

# L'inequivalenza: $\neg Q_{TM}$

$\neg EQ_{TM} = \{ \langle M, M' \rangle \mid M, M' \text{ sono TM e } L(M) \neq L(M') \}$  è decidibile? NO!

Turing riconoscibile? NO!

Riduciamo  $A_{TM}$  al complemento dell'inequivalenza per TM, cioè all'equivalenza:  $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$ .

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T1, T2 \rangle$  la codifica di due TM  $T1$  e  $T2$  tali che  $w$  è in  $L(M)$  sse  $L(T1) = L(T2)$ . Sempre sull'alfabeto binario.

La TM $T1$ è così definita: input $x$ accetta	$L(T1) = \{0,1\}^*$
---	---------------------

La TM $T2$ è così definita: input $x$ esegui $M$ su $w$ se $M$ accetta $w$ accetta se $M$ rifiuta, rifiuta.	Se $w$ è in $L(M)$ allora $L(T2) = \{0,1\}^*$ mentre se $w$ non è in $L(M)$ allora $L(T2) = \emptyset$
---	---

# L'inequivalenza: $\neg Q_{TM}$

$\neg EQ_{TM} = \{ \langle M, M' \rangle \mid M, M' \text{ sono TM e } L(M) \neq L(M') \}$  è decidibile? NO!

Turing riconoscibile? NO!

Riduciamo  $A_{TM}$  al complemento dell'inequivalenza per TM, cioè all'equivalenza:  $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$ .

Ad un input per  $A_{TM}$ ,  $\langle M, w \rangle$ , associamo  $\langle T1, T2 \rangle$  la codifica di due TM  $T1$  e  $T2$  tali che  $w$  è in  $L(M)$  sse  $L(T1) = L(T2)$ . Sempre sull'alfabeto binario.

La riduzione è calcolata dalla TM R seguente.

R = Input:  $\langle M, w \rangle$

Output:  $\langle T1, T2 \rangle$  dove

$T1$  = input  $x$   
accetta

$T2$  = esegui  $M$  su  $w$   
se  $M$  accetta  $w$ , accetta  
se  $M$  rifiuta  $w$ , rifiuta.

quindi abbiamo ottenuto la riduzione voluta:  $w$  è in  $L(M)$  sse  $L(T1) = L(T2)$ .

# Completezza di $A_{TM}$

$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ è TM e } w \text{ in } L(M) \}$  è completo per  $\mathcal{L}(TM)$

Un linguaggio è completo rispetto a una classe di linguaggi se appartiene a quella classe e se ogni linguaggio della classe si riduce ad esso. Si deve dimostrare solo che ogni linguaggio Turing riconoscibile si riduce a  $A_{TM}$ , visto che  $A_{TM}$  è in  $\mathcal{L}(TM)$ .

Riduciamo  $L$  ad  $A_{TM}$  cioè mostriamo che  $L \leq_m A_{TM}$  per ogni linguaggio in  $\mathcal{L}(TM)$ . Ad un input per  $L$ ,  $\langle w \rangle$ , associamo  $\langle T, w \rangle$  la codifica di una TM  $T$  che riconosce  $L$ . Questa associazione è calcolabile, e sia  $R$  la macchina che la calcola.

La TM  $R$  è così definita:

input  $w$

output: la coppia  $\langle T, w \rangle$ , dove  $T$  è una TM tale che  $L(T) = L$ .

Banalmente  $w$  è in  $L$  sse  $\langle T, w \rangle$  è in  $A_{TM}$ .