Sommario

Esempi di problemi NP-completi:

3-SAT

CLIQUE

VERTEX-COVER

INDEPENDENT-SET

3-COLORING

HamCycle

TSP

3SAT

Consideriamo formule booleane in forma normale congiuntiva (CNF) con esattamente 3 letterali per clausola e chiamiamo il loro insieme 3CNF.

Per esempio:

$$\varphi = (X_1 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2)$$

brevemente chiamate formule in 3CNF

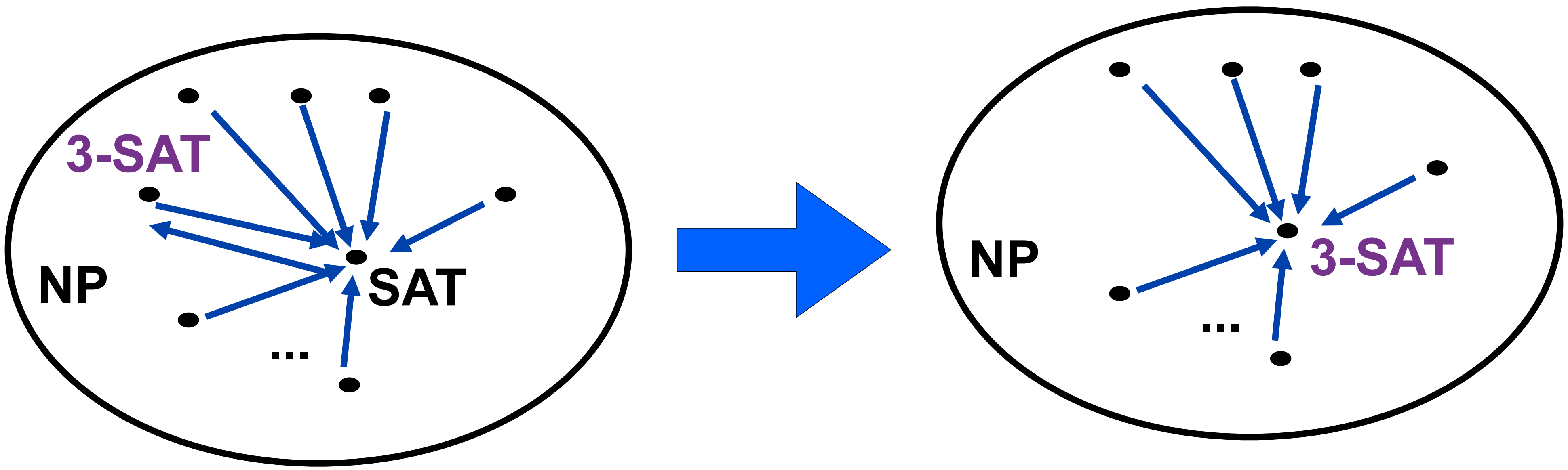
3-SAT = $\{\varphi \mid \varphi$ è in 3CNF e soddisfacibile$\}$

Teorema. 3-SAT è NP-completo

3SAT

Teorema. 3-SAT è NP-completo

Proviamo che 3-SAT è NP-hard, per riduzione da SAT.



Sia $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ una formula in CNF. Associeremo a φ una formula in 3CNF che sarà soddisfacibile se e solo se lo è φ. Trasformeremo le clausole di φ in formule in 3CNF, in tempo polinomiale.

3SAT è NP-completo

Sia quindi C una delle clausole, distinguiamo tre casi, qui X, Y, X_i sono letterali

C = X prendiamo C' = $X \vee X \vee X$

C = $X \vee Y$, prendiamo C' = $X \vee X \vee Y$

C = $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$, con n>3, allora introduciamo nuove variabili in modo da ottenere una formula in 3CNF:

φ_C =

$(X_1 \vee X_2 \vee Z_1) \wedge \ldots \wedge (\neg Z_{i-2} \vee X_i \vee Z_{i-1}) \wedge \ldots \wedge (\neg Z_{n-3} \vee X_{n-1} \vee X_n)$

(serve una variabile per le prime due e
una per tutte le altre meno le ultime due)

3SAT è NP-completo, 2

$C = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n$ è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ $\varphi_C =$
$(X_1 \vee X_2 \vee Z_1) \wedge \ldots \wedge (\neg Z_{i-2} \vee X_i \vee Z_{i-1}) \wedge \ldots \wedge (\neg Z_{n-3} \vee X_{n-1} \vee X_n)$
lo è.

$\Rightarrow$ Sia C soddisfacibile allora esiste un i, $1 \leq i \leq n$, tale che il letterale X_i ha valore vero. Allora φ_C è soddisfatta
ponendo Z_j a vero per ogni $j = 1, \ldots, i-2$, e
ponendo Z_j a falso per ogni $j = i-1, \ldots, n-3$,
(saranno tutti a falso se $i \leq 2$ e tutti a vero se $i \geq n-1$)

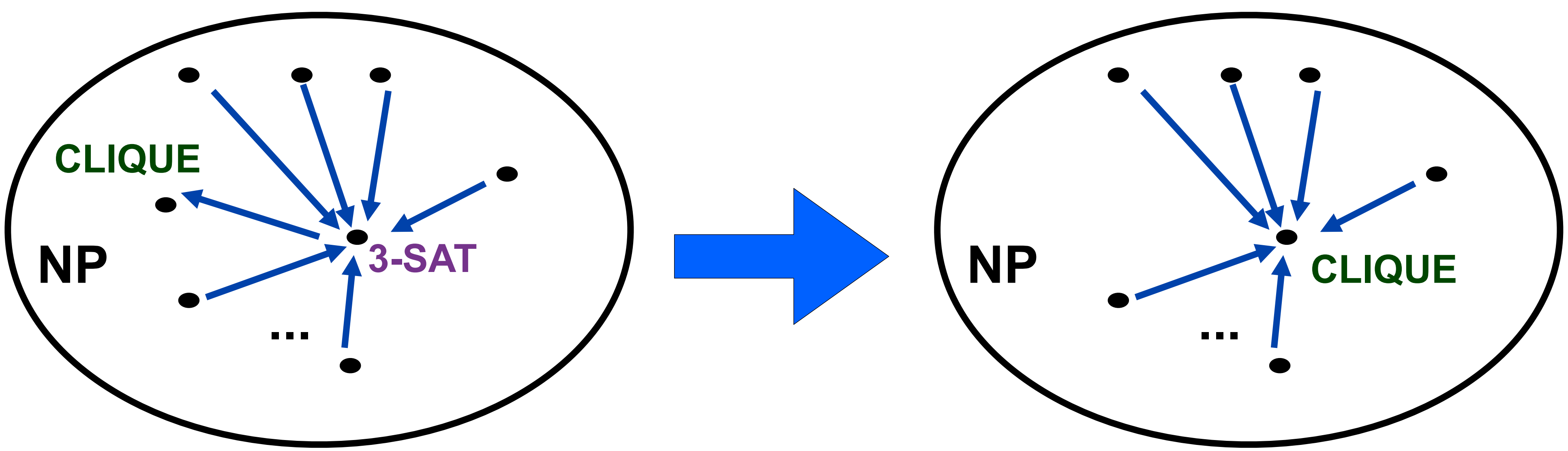
$\Leftarrow$ Sia φ_C soddisfacibile, basta osservare che allora non tutti gli X_i possono essere a falso perchè altrimenti Z_1 dovrebbe essere vero e quindi $Z_2, \ldots,$fino a Z_{n-3} dovrebbero essere vere ma allora l'ultima clausola sarebbe falsa.

CLIQUE è NP-completo

Il problema del CLIQUE
istanza (G,k) dove G è un grafo non diretto e k>0
istanza SI: G ha un k-clique

CLIQUE = {<G,k> | G è un grafo non diretto con un k-clique}

1. **CLIQUE è in NP**
2. **3-SAT $\leq_P$ CLIQUE.**

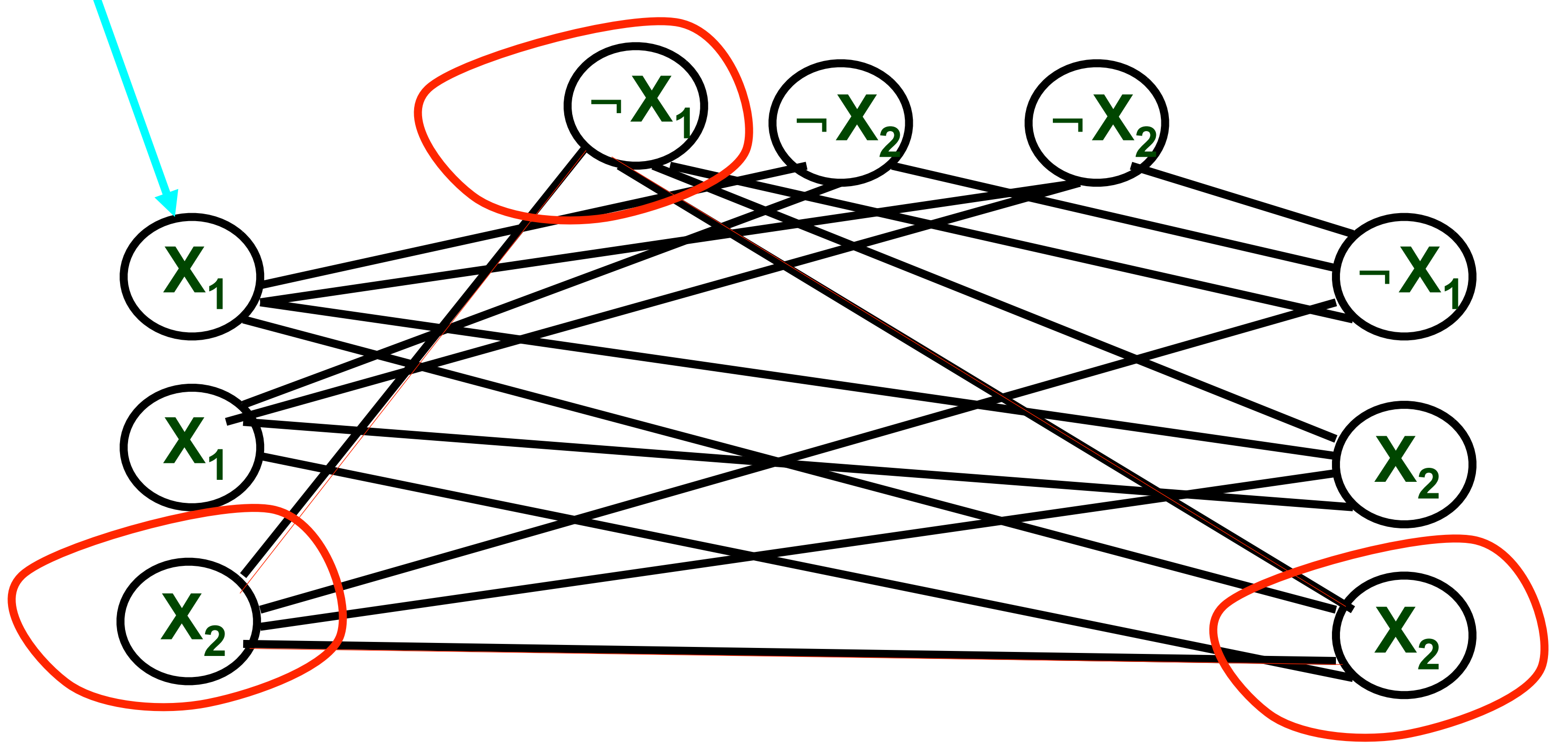


CLIQUE è NP-completo

Data una formula φ in 3CNF, con k clausole, costruiremo un grafo G_φ in modo tale che

φ è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G_φ ha un k-clique

$$\overset{0}{\varphi} = (X_1 \vee \overset{1}{X_1} \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2)$$



CLIQUE è NP-completo

φ è soddisfacibile $\Longrightarrow$ G_φ ha un k-clique

Se φ è soddisfacibile in ognuna delle k clausole c'è un letterale vero, quei letterali formano un k clique, infatti i nodi corrispondenti sono connessi perchè scelti tra clausole differenti e certamente i letterali non sono uno il negato di un altro.

G_φ ha un k-clique $\Longrightarrow$ φ è soddisfacibile

Se G_φ ha un k-clique, i nodi provengono da clausole diverse. Assegnamo valore vero ai letterali corrispondenti; questo assegnamento non è contradditorio perchè tra i k letterali non ce ne sono due l'uno il negato dell'altro. La formula φ è soddisfatta perchè in ogni clausola c'è un letterale vero.

IndependentSET è NP-hard

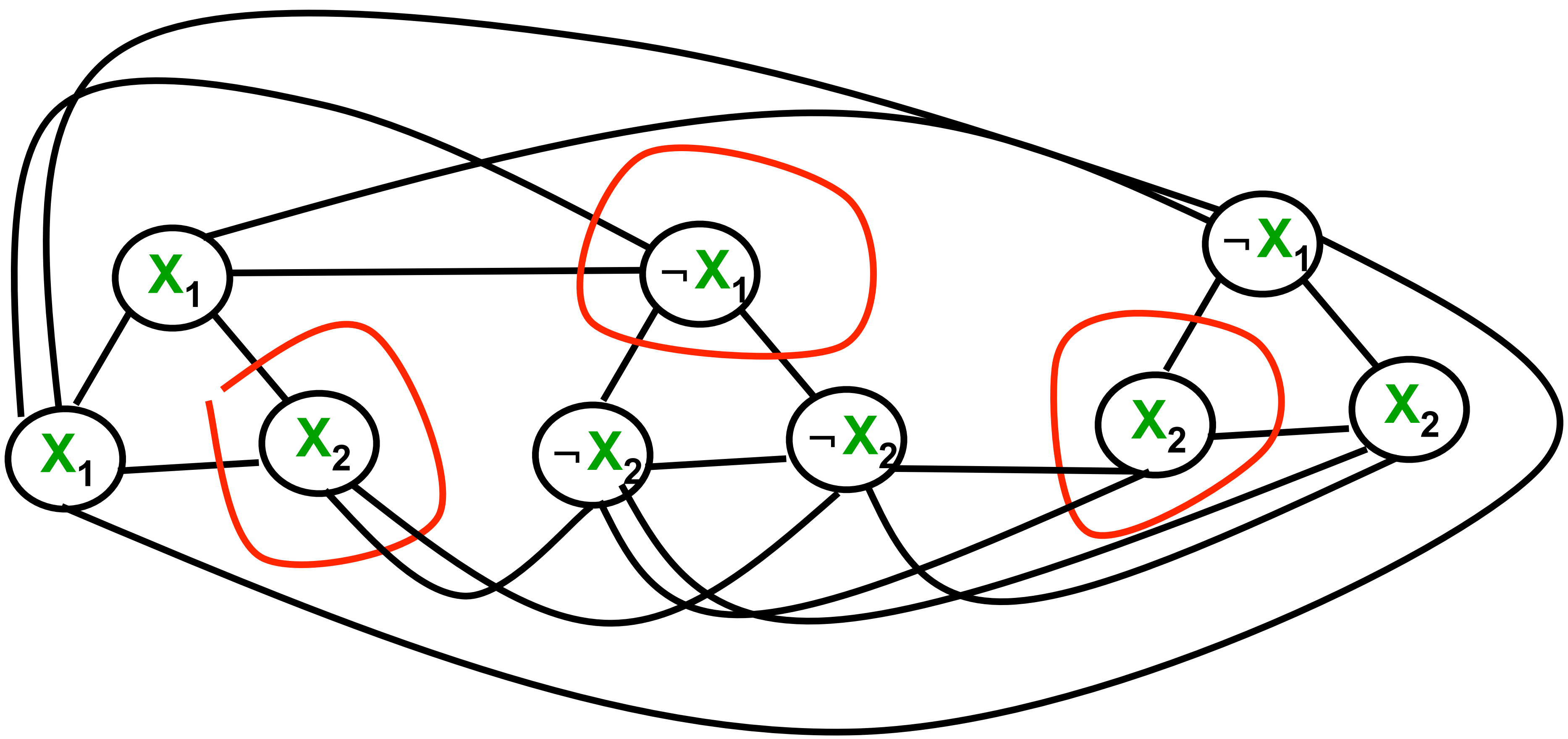
Proviamo che
IndependentSET = {<G,k> | G è un grafo non diretto con un sottoinsieme di k vertici non connessi tra loro} è NP-hard, per riduzione da 3-SAT.

Data una formula φ in 3CNF, con k clausole, costruiremo un grafo G_φ in modo tale che

φ è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G_φ ha un k-independentSET

IndependentSET è NP-hard

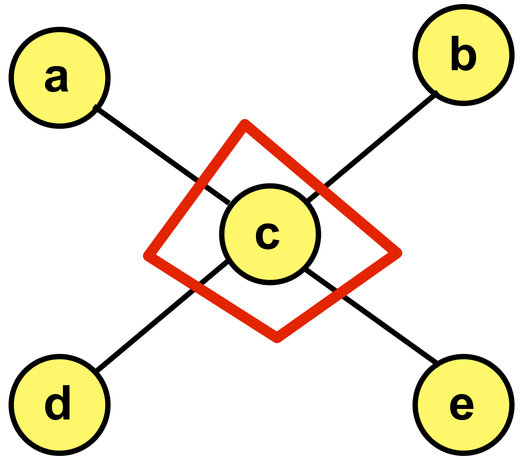
$$\varphi = (\overset{}{x_1} \vee x_1 \vee \overset{1}{x_2}) \wedge (\neg \overset{1}{x_1} \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \overset{1}{x_2} \vee x_2)$$



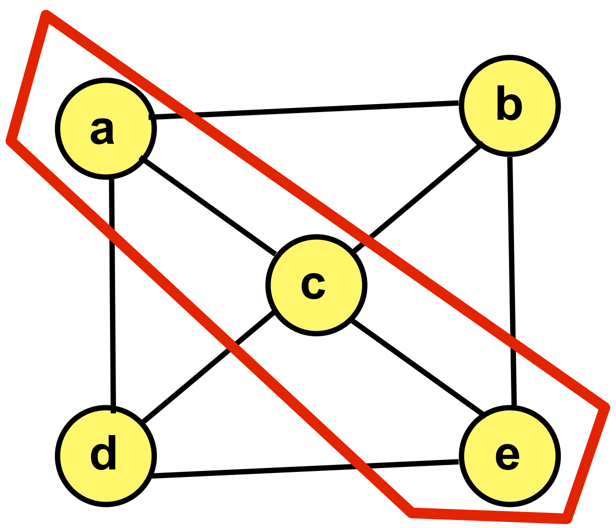
φ è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G_φ ha un k-independentSET

VERTEX-COVER è NP-completo

Un vertex cover in un grafo non diretto è un sottoinsieme dei vertici con la proprietà che ogni arco di G ne tocca uno. Un k-vertex cover è un vertex cover con k nodi.



1-vertex cover



3-vertex cover

VERTEX-COVER è NP-completo

Il problema del VERTEX-COVER
istanza (G,k) dove G è un grafo non diretto e k>0
istanza SI: G ha un k-vertex-cover

VERTEX-COVER =
{<G,k> | G è un grafo non diretto con un k-vertex cover}

Teorema. VERTEX-COVER è NP-completo

1. VERTEX-COVER è in NP
2. 3-SAT $\leq_P$ VERTEX-COVER.

VERTEX-COVER è NP-completo

Il problema del VERTEX-COVER è in NP: il certificato è un sottoinsieme di k vertici di G.

Dimostriamo che VERTEX-COVER è NP-hard via una riduzione polinomiale da 3-SAT.
Data una formula φ in 3CNF, con c clausole e v variabili, costruiremo un grafo G_φ, con $3c+2v$ nodi, in modo tale che

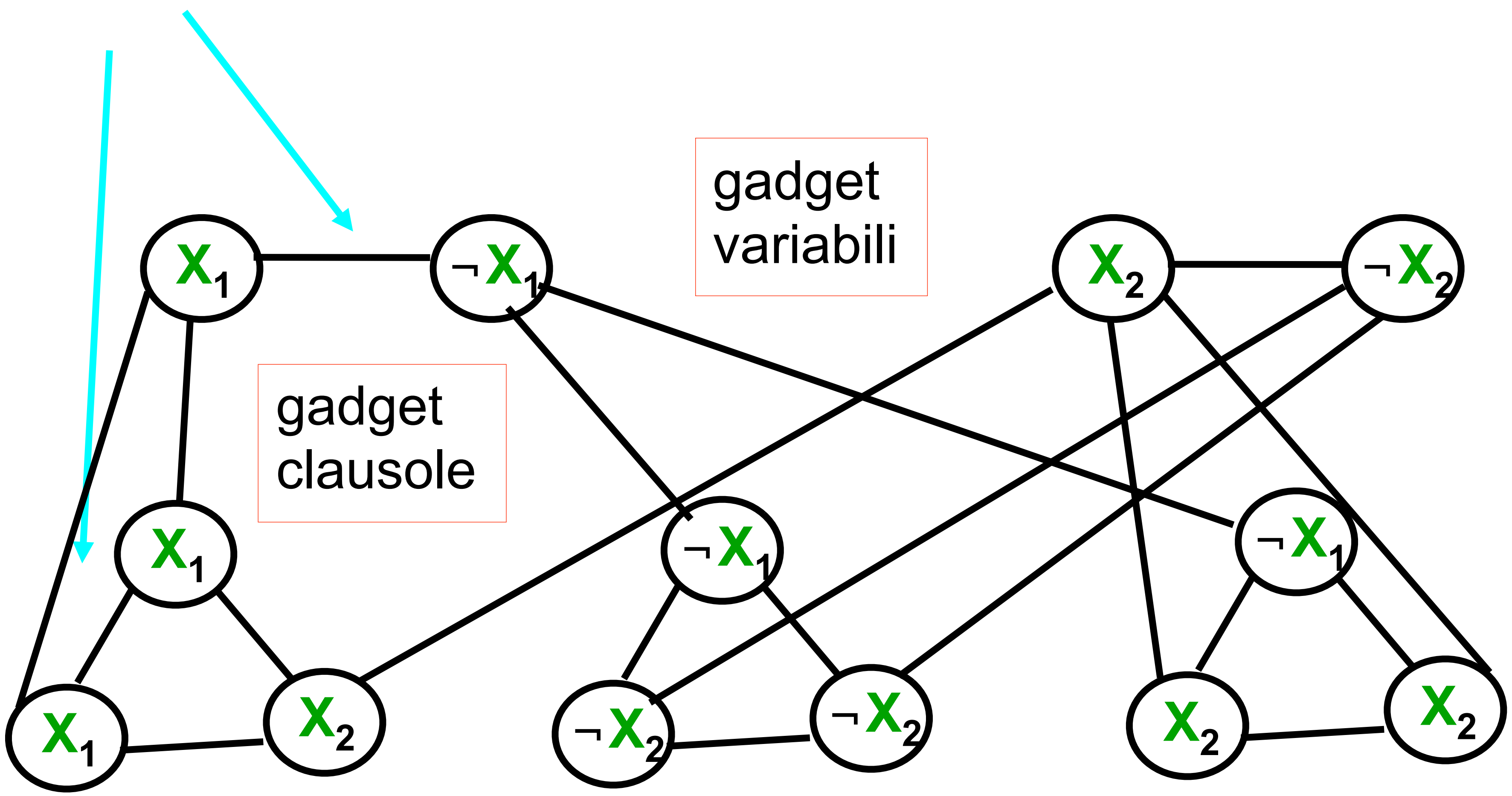
φ è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G_φ ha un $2c+v$ -vertex cover

VERTEX-COVER è NP-hard

costruzione di G_φ

c = 3 e v = 2

$$\varphi = (X_1 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2)$$

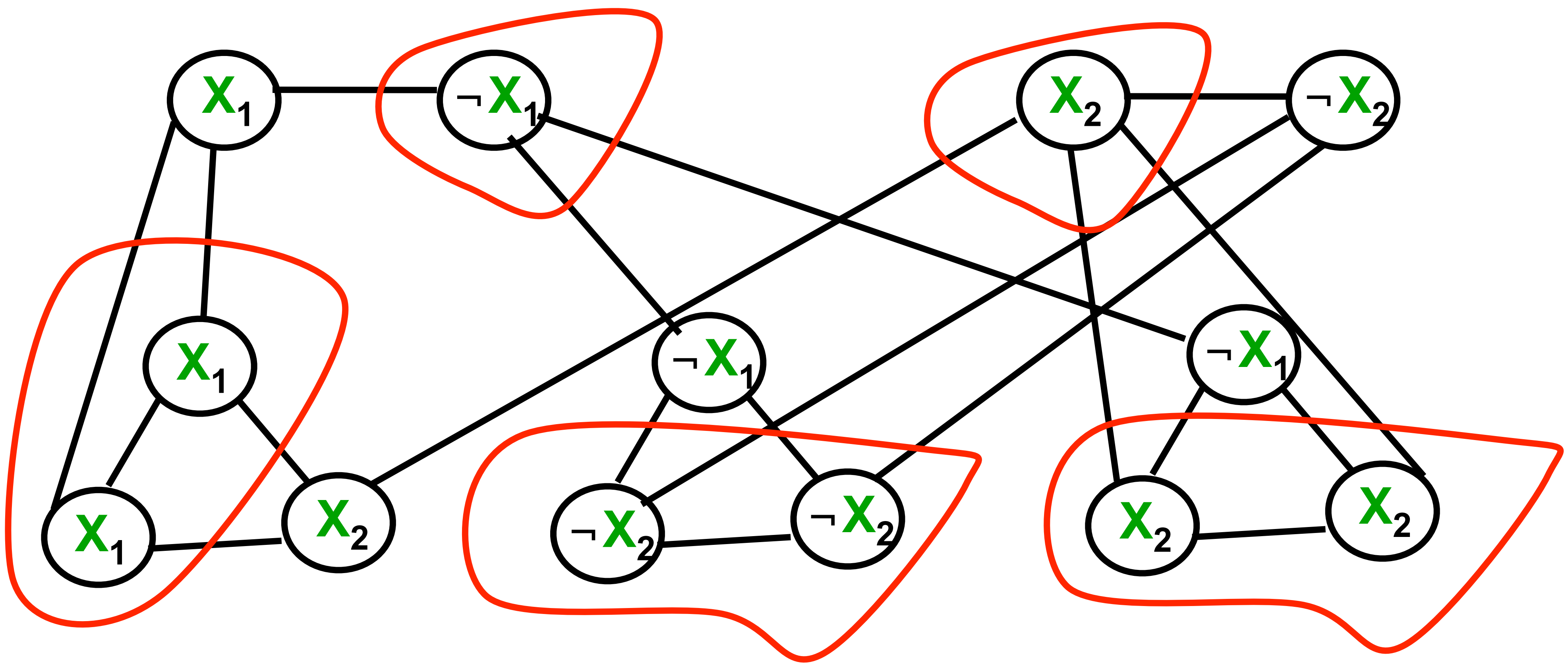


2c+v = 8

VERTEX-COVER è NP-hard

φ è soddisfacibile $\Longrightarrow$ G_φ ha un 2c+v -vertex cover

$$\varphi = (\overset{}{X_1} \vee \overset{1}{X_1} \vee X_2) \wedge (\neg \overset{1}{X_1} \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \overset{1}{X_2} \vee X_2)$$

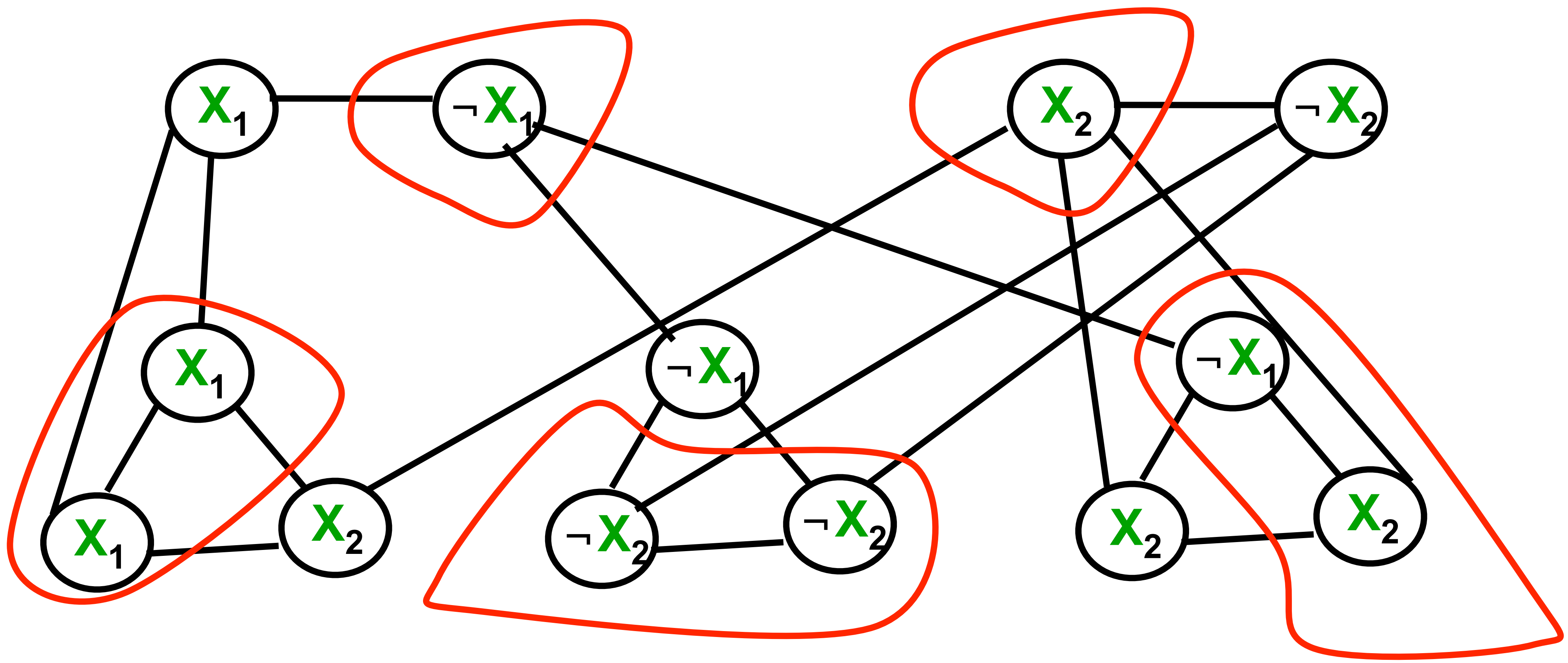


Prendiamo un nodo in ciascuno dei gadget delle variabili la cui etichetta sia vera nell'assegnamento e per ogni gadget di clausola i due nodi non connessi con quello scelto. Nell'esempio per aver preso X_2 vera nella prima clausola dobbiamo prendere X_1 due volte nel primo gadget clausola.

VERTEX-COVER è NP-hard

G_φ ha un 2c+v -vertex cover $\Longrightarrow$ φ è soddisfacibile

$$\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee \overset{1}{x_2}) \wedge (\overset{1}{\neg x_1} \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \overset{1}{x_2} \vee x_2)$$



In un 2c+v-vertex cover ci deve essere un vertice per ogni gadget delle variabili, e due dei vertici nei gadget delle clausole, e così sono 2c+v. Assegnamo valore vero alle variabili nei gadget delle variabili che sono scelti nel vertex cover.

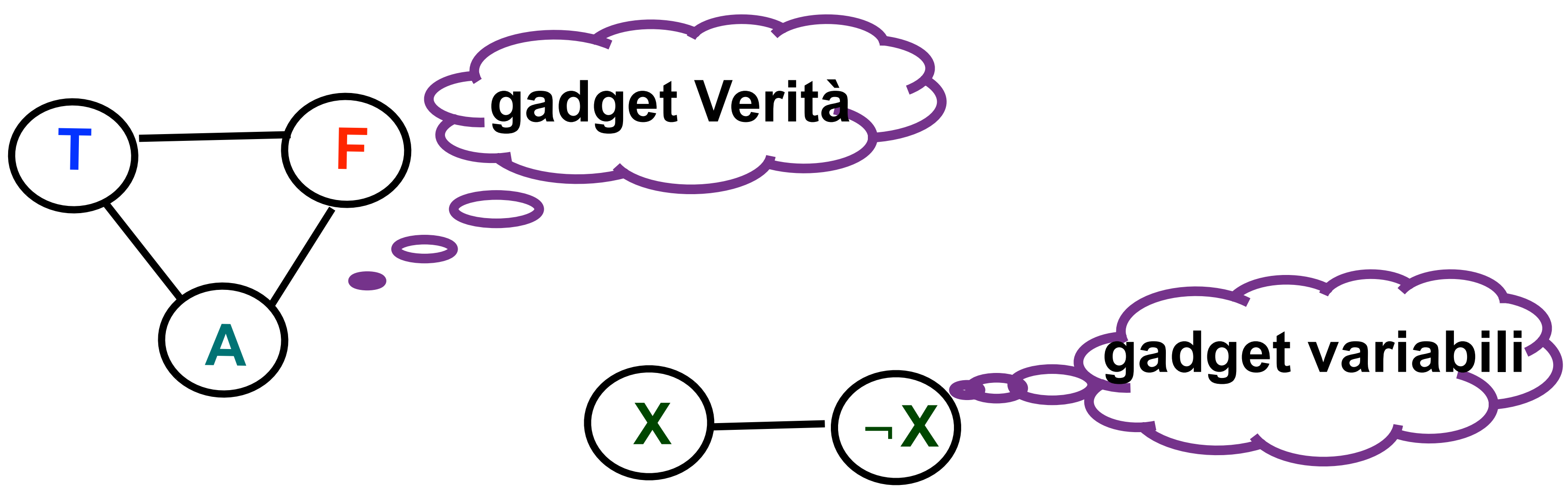
Per esercizio si mostri che CLIQUE $\leq_P$ INDEPENDENT-SET.

3-Coloring è NP-hard

Una colorazione di un grafo $G=(V,E)$ è una funzione $f : V \rightarrow \{1,\ldots,n\}$ tale che $\{u,v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$. Una 3-colorazione usa solo tre colori.

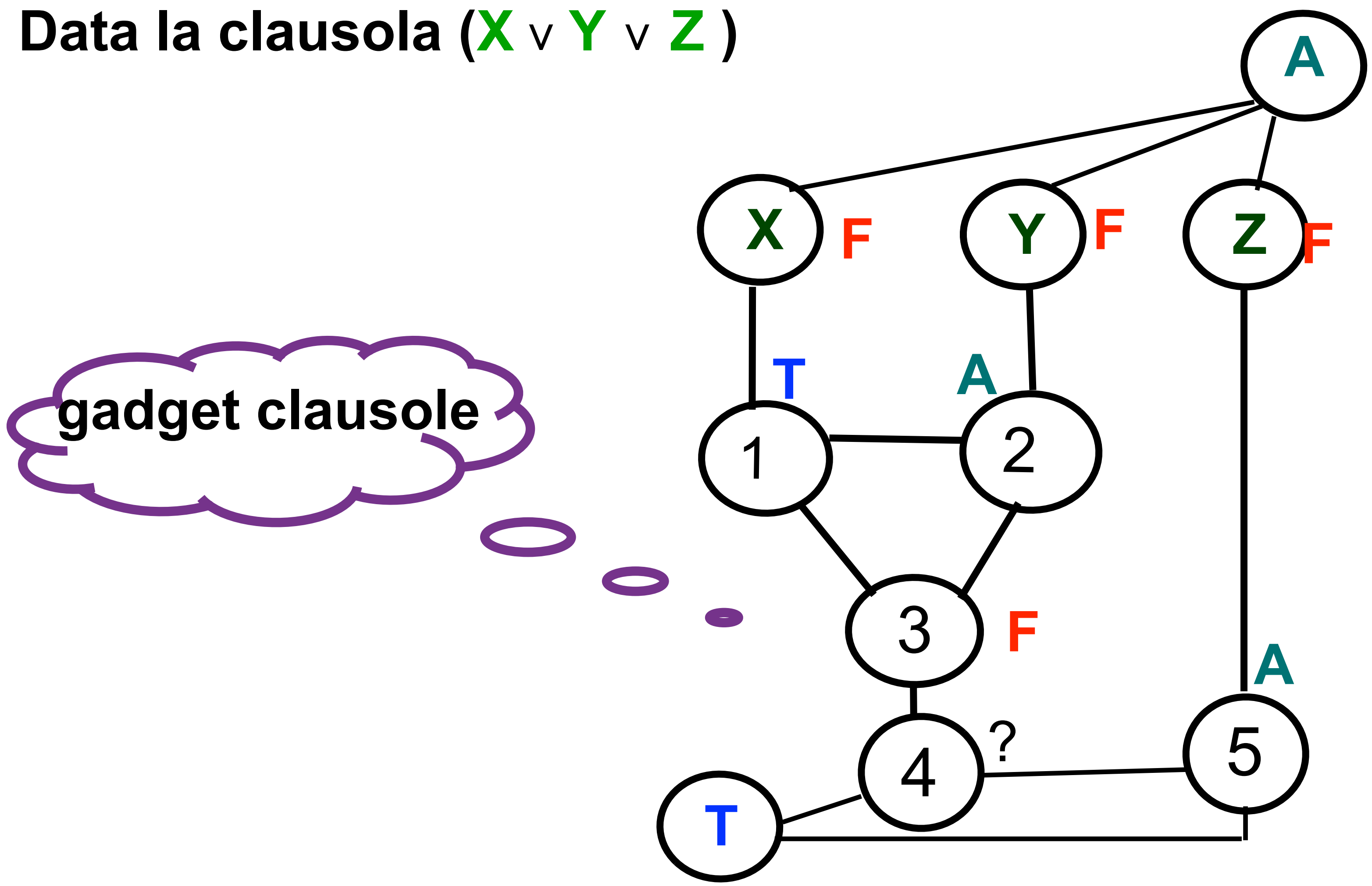
3-col = {<G> | G è un grafo non diretto che ha una 3-colorazione} è NP-hard

Per riduzione da 3-SAT



3-Coloring è NP-hard

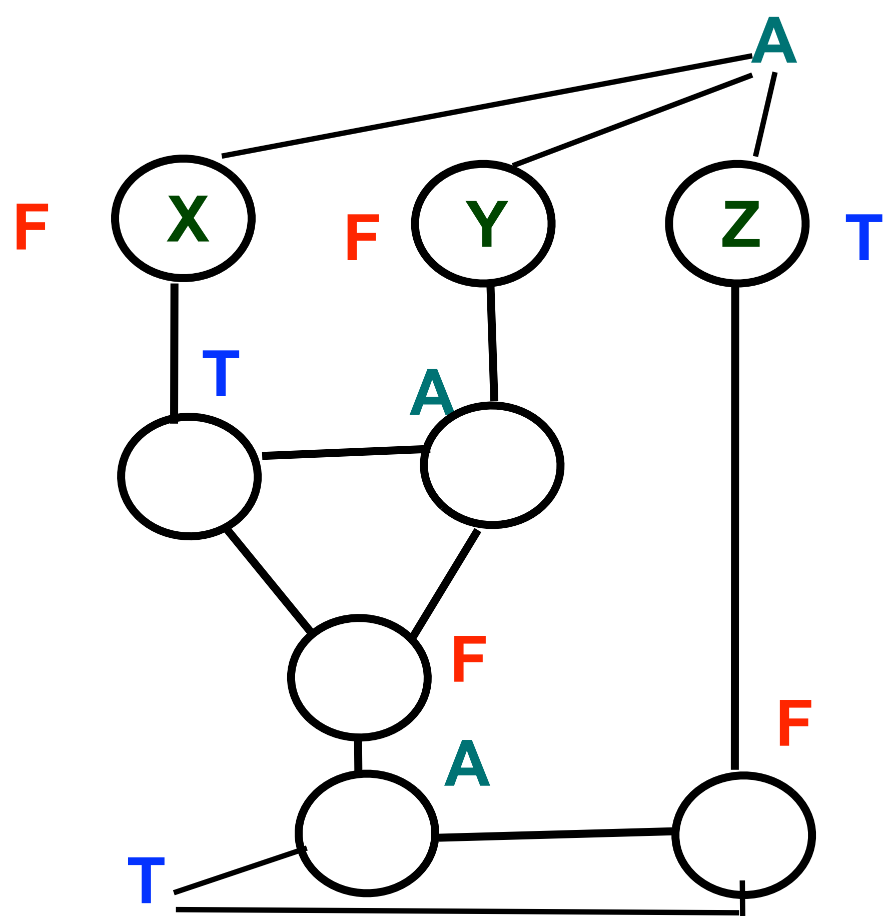
Data la clausola (X ∨ Y ∨ Z)



Il nodo 5 è connesso con un nodo colorato T e uno colorato F quindi non può che assumere il colore A. Ma il nodo 4 anche risulta connesso con un nodo colorato F, necessariamente, e un nodo colorato T, quindi anche 4 dovrebbe assumere il colore A.

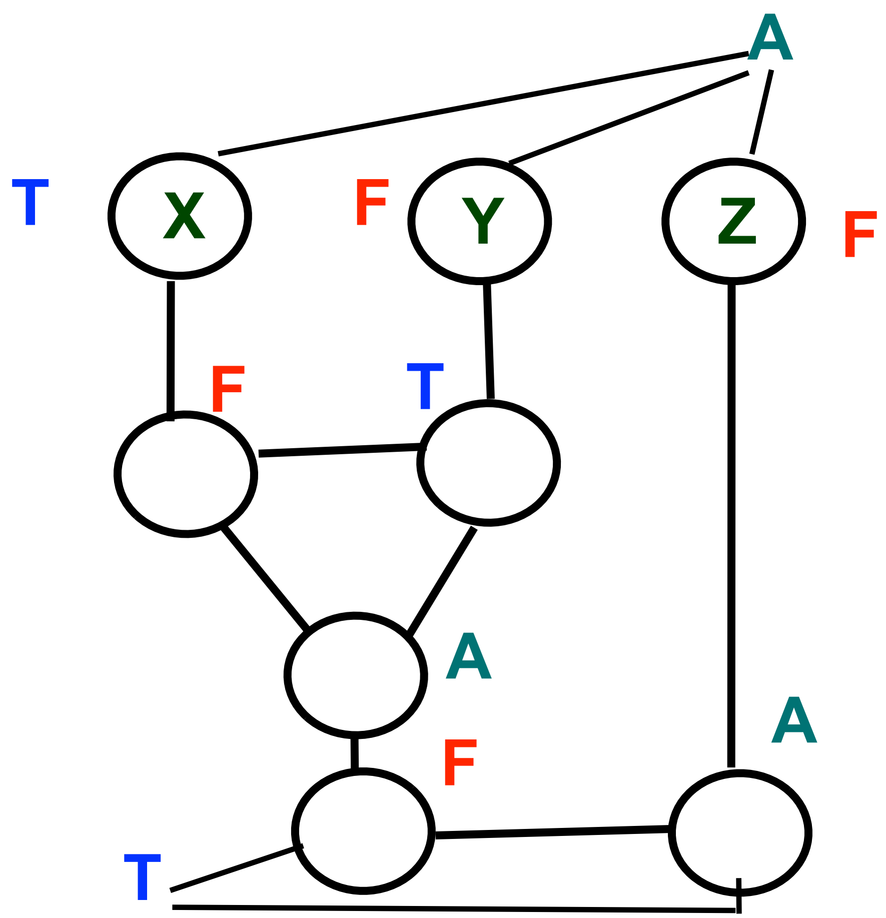
3-Coloring è NP-hard

Abbiamo visto che il gadget clausola non è colorabile se la clausola è falsa.
Basta attribuire valore vero a una variabile per ottenere la colorabilità



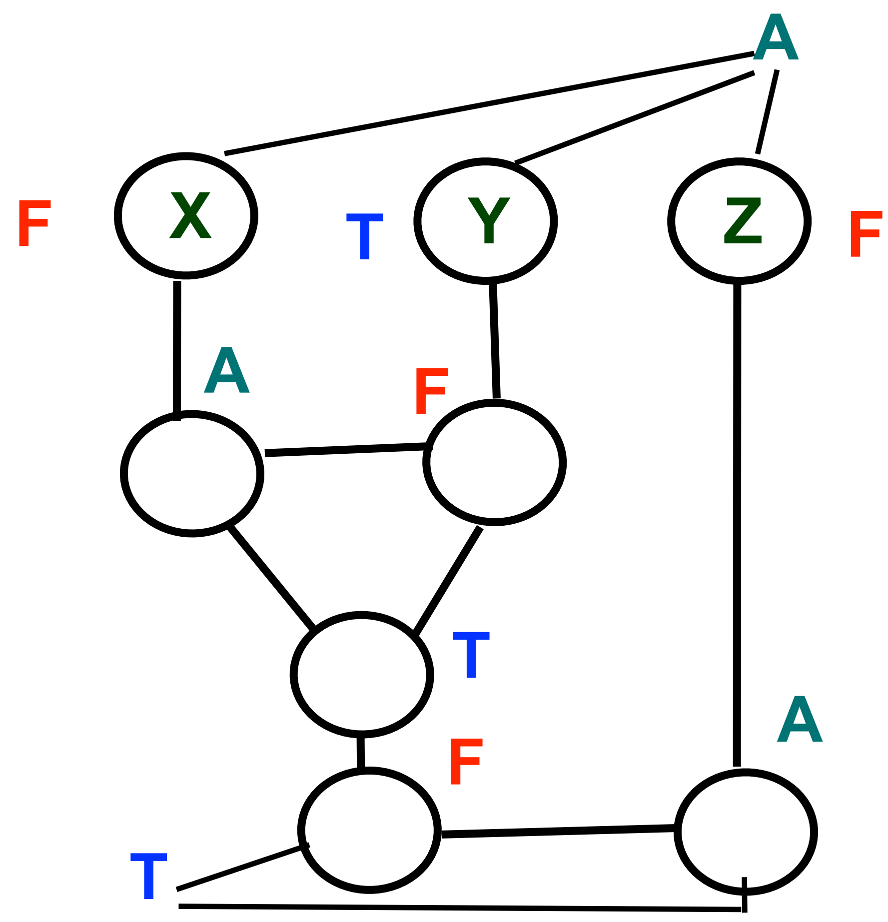
φ = **(X ∨ Y ∨ Z)**

3-Coloring è NP-hard



φ = (X ∨ Y ∨ Z)

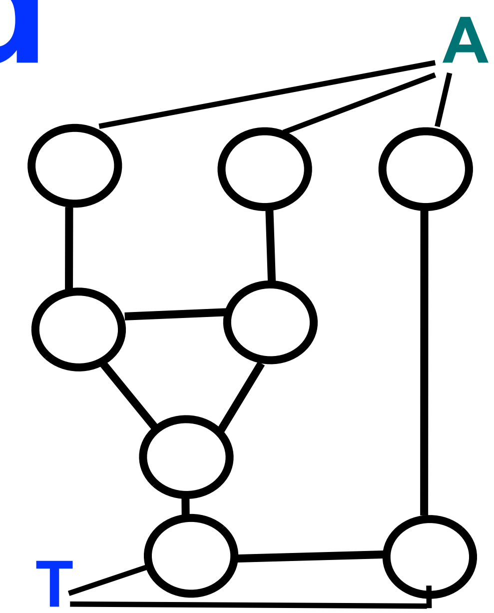
3-Coloring è NP-hard

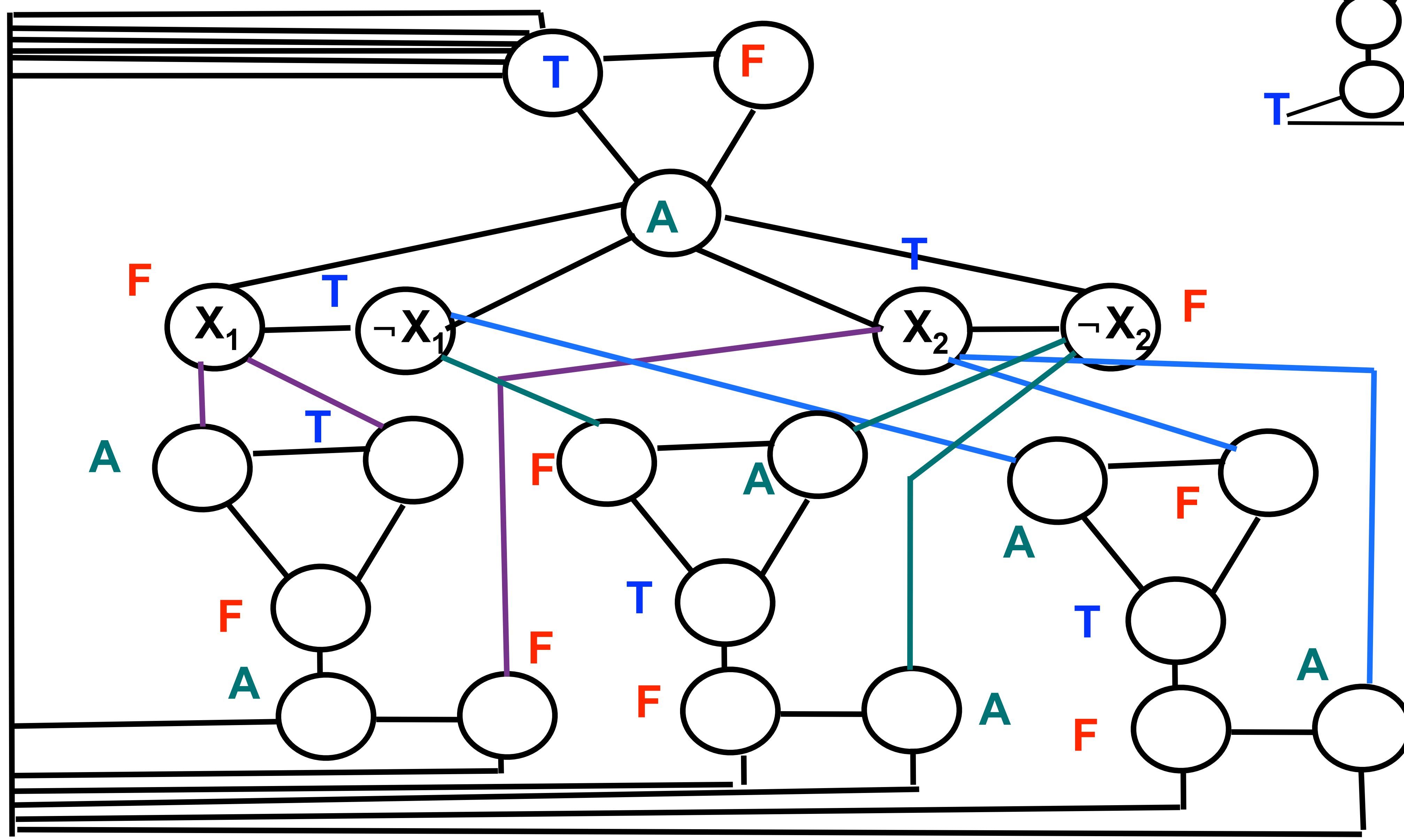


$\varphi = (X \vee Y \vee Z)$

3-Coloring è NP-hard

$\varphi = (X_1 \vee X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_2)$

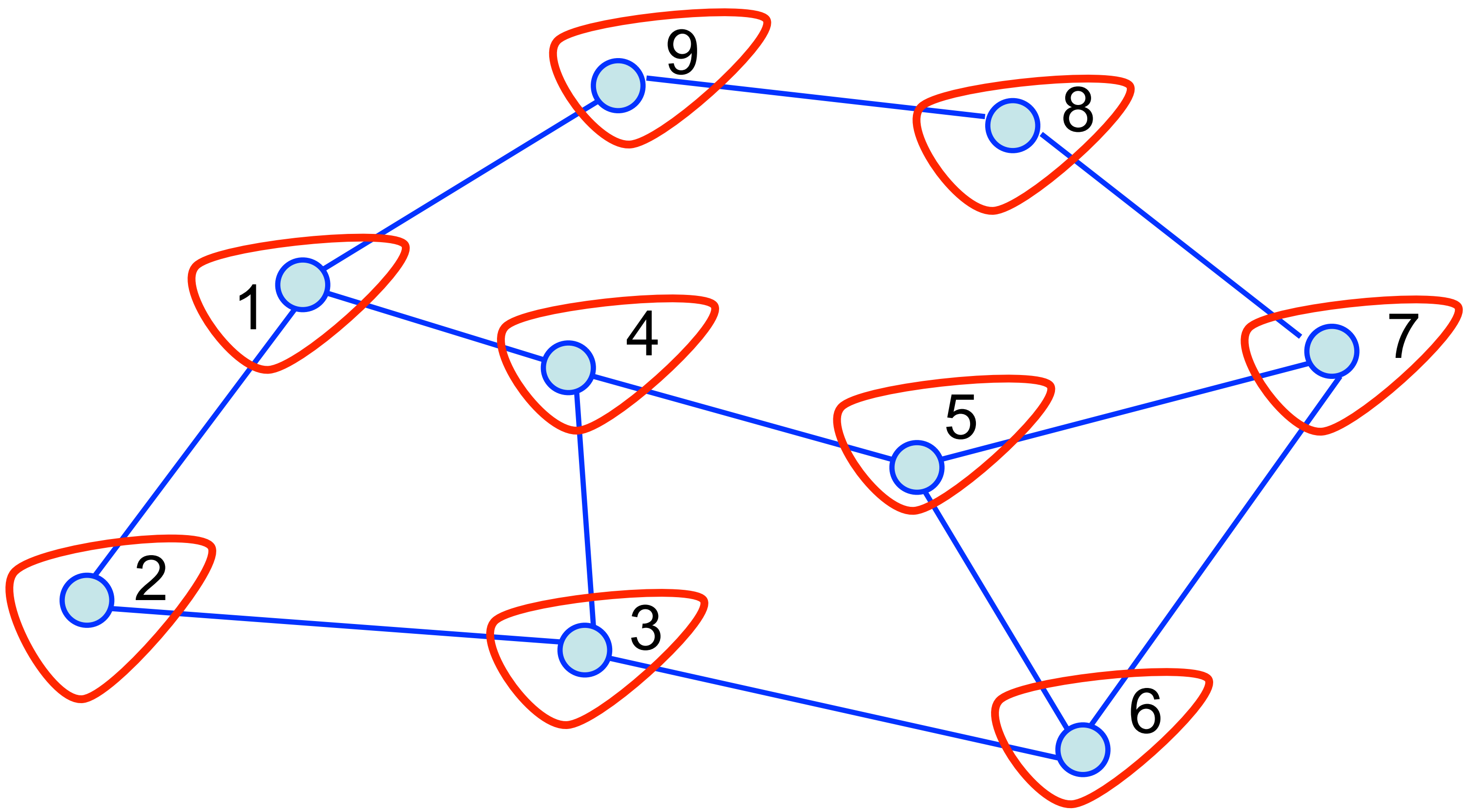




HamCycle

HamCycle è il problema dell'esistenza di un ciclo semplice che contiene tutti i vertici, cioè un ciclo hamiltoniano, in un grafo non diretto.

HamCycle = {<G> | G è un grafo non diretto con un ciclo hamiltoniano}

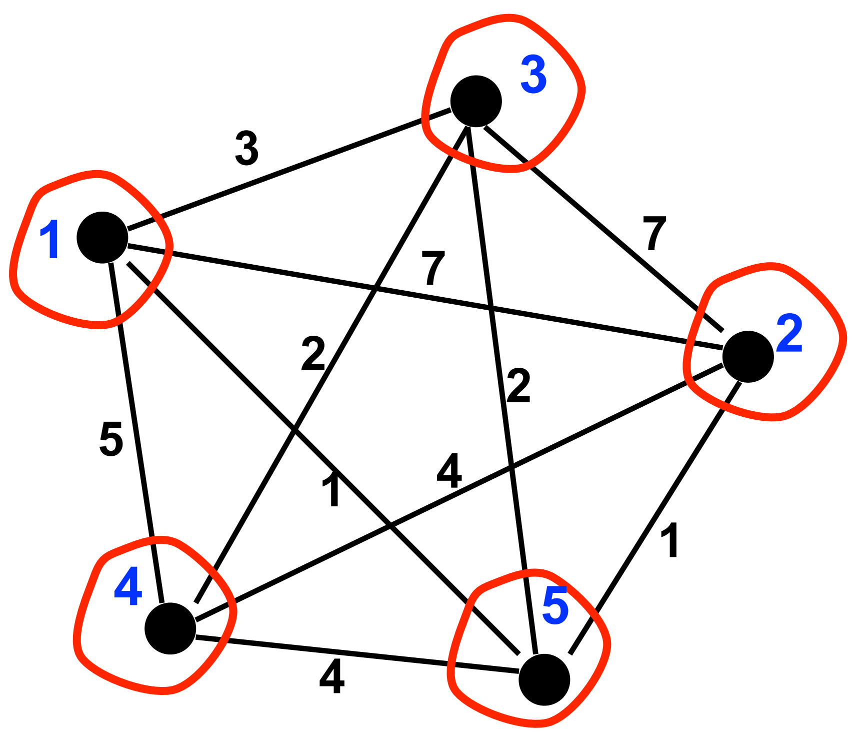


TSP

TSP è il problema decisionale associato al Traveling Salesman Problem (il problema del commesso viaggiatore):

dato un grafo G=(V,E) non diretto completo con una funzione costo a valori interi non negativi $p : E \rightarrow N$ e un intero non negativo B, si vuole sapere se esiste un ciclo hamiltoniano t su G di costo minore o uguale a B.

TSP = {<G=(V,E),p,B> | G è un grafo non diretto completo, p una funzione peso $p : E \rightarrow N$, B in N e G ha un ciclo hamiltoniano di peso ≤ B}



B = 25

p(c)= 21

Hamcycle e TSP sono NP-completi

HamCycle = {<G> | G è un grafo non diretto con un ciclo hamiltoniano}

TSP = {<G=(V,E),p,B> | G è un grafo non diretto completo, p una funzione peso p : E $\rightarrow$ N, B in N e G ha un ciclo hamiltoniano di peso ≤ B}

Diamo per noto che Hamcycle sia NP-hard (vedi Sipser), sappiamo che è in NP, facciamo vedere che TSP è NP-completo.

Non è difficile dimostrare che TSP è in NP.

Dimostriamo che HamCycle $\leq_p$ TSP