

Sommario

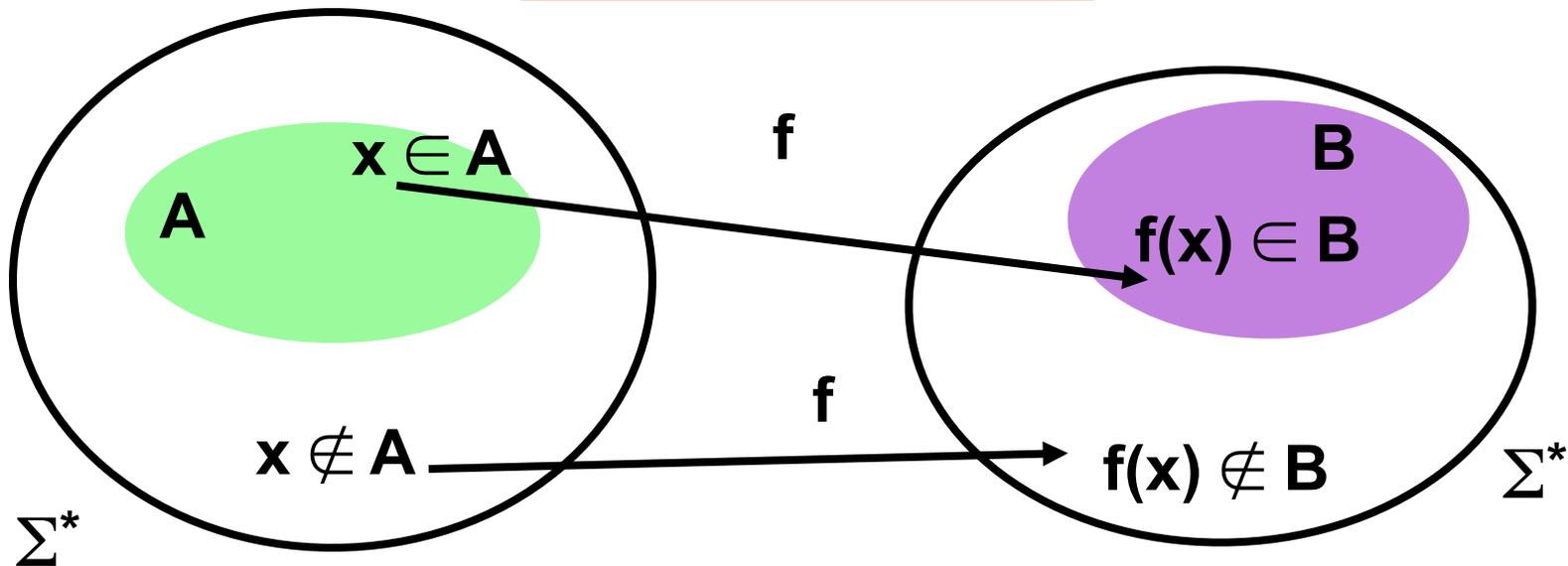
- **Riduzioni polinomiali**
- **NP- completezza**
- **Proprietà dei problemi NP- completi**
- **Teorema di Cook**

Riduzione polinomiale

Dati $A \subseteq \Sigma^*$ e $B \subseteq \Sigma^*$ due linguaggi diciamo che A si riduce polinomialmente a B , in breve $A \leq_p B$, se esiste una funzione

$f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ Turing calcolabile **in tempo polinomiale** tale che

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$



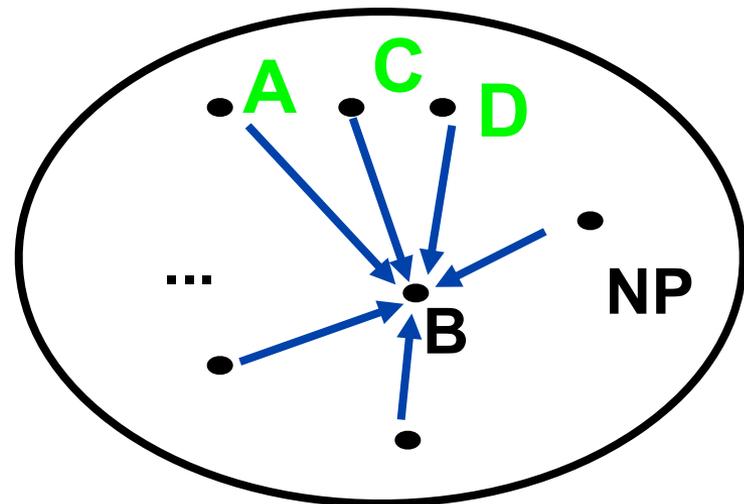
NP-completezza

Un problema B (linguaggio B) si dice

NP-completo se

1. $B \in NP$
2. è NP-hard cioè è tale che ogni problema in NP si riduce polinomialmente ad esso

$$(\forall A \in NP A \leq_p B)$$



Riduzioni polinomiali: proprietà

Teorema 1. Se $A \leq_p B$ e $B \in P$ allora $A \in P$.

Teorema 2. La relazione \leq_p è riflessiva e transitiva.

Teorema 3. Se $A \in P$, $A \in NP$ -completo allora $P = NP$

Teorema 4.

Se $A \in NP$ -completo, $A \leq_p B$ con $B \in NP$ allora $B \in NP$ -completo

Formule booleane

- Una formula booleana della logica proposizionale è induttivamente definita a partire da un insieme numerabile di variabili booleane, i connettivi \wedge , “e”, \vee , “o”, \neg “non” e le parentesi.
- Una formula è soddisfacibile se esiste un assegnamento di valori di verità alle variabili che rende la formula vera.

Esempi: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ è soddisfatta da $X=Y=1$ e Z qualunque, mentre $X \wedge \neg X$ non può essere soddisfatta

$(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y)$ è una CNF formula

NP-completezza: teorema di COOK-LEVIN

Sia **SAT** il linguaggio delle formule soddisfacibili e sia CNFSAT il linguaggio delle formule soddisfacibili in CNF.

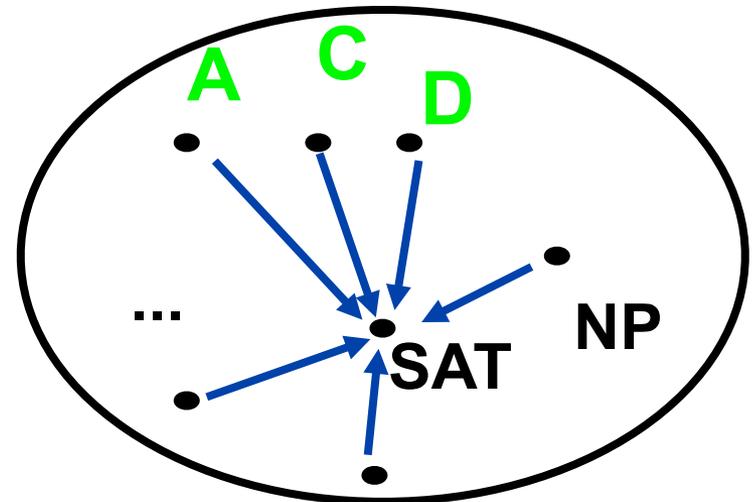
Teorema di COOK-LEVIN: SAT (e CNFSAT) è NP- completo

Prova

Per dimostrarlo si deve far vedere che

1. **SAT** è in **NP**
2. ogni linguaggio **A** in **NP** si riduce polinomialmente a **SAT**.

Il punto 1 già visto.
Dimostriamo il punto 2.



La riduzione f

Se A è in **NP** esiste una NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ che decide A con complessità di tempo n^k , per qualche k . Definiremo una funzione f , **polinomialmente Turing-calcolabile**, che associa una formula φ ad ogni x , in modo tale che

$$x \in L(T) = A \text{ sse } \varphi \in \text{SAT.}$$

La formula φ deve descrivere una sequenza di configurazioni determinata dall'input x :

$$c_0 \Rightarrow_T c_1 \Rightarrow_T \dots \Rightarrow_T c_i \text{ con } c_0 = q_0 x \text{ e } 1 \leq i \leq n^k$$

dove $c_i = \alpha q_a \beta$ sse $x \in L(T)$, cioè

c_i è di accettazione se e soltanto se φ è soddisfacibile

La riduzione f: primi dettagli

La formula φ deve descrivere una sequenza di configurazioni determinata dall'input x :

$$C_0 \Rightarrow_T C_1 \Rightarrow_T \dots \Rightarrow_T C_i$$

con $1 \leq i \leq n^k$

Serviranno quindi delle formule che esprimano proprietà che assicurino che ogni c_j è una configurazione (un solo simbolo per cella di nastro, un solo stato, una sola posizione per la testina di lettura), e proprietà riguardanti la relazione “porta a” tra configurazioni:

se $(p, b, R) \in \delta(q, a)$ allora $\alpha q a c \beta \Rightarrow_T \alpha b p c \beta$

se $(p, b, L) \in \delta(q, c)$ allora $\alpha a q c \beta \Rightarrow_T \alpha p a b \beta$

Le variabili della formula

Data la NTM $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ che decide A con complessità di tempo n^k , per qualche k , la formula associata φ utilizza le seguenti variabili:

$S_{i,q}$ per ogni $i=1, \dots, n^k$ e $q \in Q$ che dice, se vera, “ q è lo stato di M all’ i -simo passo”

$T_{i,j,a}$ per ogni $i, j=1, \dots, n^k$ e $a \in \Gamma$ che dice, se vera, “ a è il simbolo in lettura nella j -sima posizione sul nastro di M all’ i -simo passo”

$H_{i,j}$ per ogni $i, j=1, \dots, n^k$ che dice, se vera, “la testina di lettura è nella j -sima posizione sul nastro di M all’ i -simo passo”

La formula

La formula φ è la **congiunzione** di formule che esprimono singole proprietà del cammino di computazione su un input x :

$$\varphi = \varphi_{\text{start}} \wedge \varphi_{\text{testina}} \wedge \varphi_{\text{nastro}} \wedge \varphi_{\text{stato}} \wedge \varphi_{\text{mossa}} \wedge \varphi_{\text{mossa/nastro}} \wedge \varphi_{\text{accettazione}}$$

φ_{start}

→ φ_{start} dice, se vera, “all’inizio, cioè al passo **1** del calcolo, lo stato è q_0 , la testina di lettura è sulla prima cella del nastro che contiene $x = a_1, \dots, a_n$ seguito da $n^k - n$ occorrenze di \perp ”

$$\rightarrow \varphi_{\text{start}} = S_{1, q_0} \wedge H_{1,1} \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq n} T_{1,j,a_j} \wedge \bigwedge_{n < j \leq n^k} T_{1,j,\perp}$$

dove $\bigwedge_{1 \leq i \leq n^k} X_{i,j} = X_{1,j} \wedge \dots \wedge X_{n^k,j}$

φ_{testina}

→ φ_{testina} dice, se vera, “ la testina di lettura è posizionata su un’unica cella del nastro in ogni passo di calcolo”

$$\varphi_{\text{testina}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \varphi_{\text{testina},i}$$

→ $\varphi_{\text{testina},i}$ dice, se vera, “la testina di lettura è posizionata su un’unica cella del nastro al passo **i**-simo di calcolo”

$$\varphi_{\text{testina},i} = (\bigvee_{1 \leq j \leq nk} H_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{1 \leq j < j' \leq nk} \neg (H_{i,j} \wedge H_{i,j'}))$$

la testina è almeno su una cella

ma non su due!

$\varphi_{testina}$ in CNF

$$\varphi_{testina,i} = (\bigvee_{1 \leq j \leq nk} H_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{1 \leq j < j' \leq nk} \neg (H_{i,j} \wedge H_{i,j'}))$$

la cui equivalente in CNF

$$\varphi_{testina,i} = (\bigvee_{1 \leq j \leq nk} H_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{1 \leq j < j' \leq nk} (\neg H_{i,j} \vee \neg H_{i,j'}))$$

Faremo vedere in ogni passo anche come costruire la formula φ in CNF.

φ_{nastro}

L' analoga a φ_{testina} per simboli di nastro :

→ φ_{nastro} dice, se vera, “ogni cella del nastro contiene un solo simbolo in ogni passo di calcolo”

$$\varphi_{\text{nastro}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \varphi_{\text{nastro},i,j}$$

$\varphi_{\text{nastro},i,j}$ dice, se vera, “la cella j -sima del nastro contiene un solo simbolo al passo i -simo di calcolo”

$$\varphi_{\text{nastro},i,j} = \left(\bigvee_{\alpha \in \Gamma} T_{i,j,\alpha} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\alpha \neq \alpha' \in \Gamma} \neg (T_{i,j,\alpha} \wedge T_{i,j,\alpha'}) \right)$$

φ_{nastro} in CNF

$$\varphi_{\text{nastro},i,j} = \left(\bigvee_{\alpha \in \Gamma} T_{i,j,\alpha} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\alpha \neq \alpha' \in \Gamma} \neg (T_{i,j,\alpha} \wedge T_{i,j,\alpha'}) \right)$$

l'equivalente in CNF:

$$\varphi_{\text{nastro},i,j} = \left(\bigvee_{\alpha \in \Gamma} T_{i,j,\alpha} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\alpha \neq \alpha' \in \Gamma} (\neg T_{i,j,\alpha} \vee \neg T_{i,j,\alpha'}) \right)$$

φ stato

L' analoga a $\varphi_{testina}$ per simboli di stato:

→ φ_{stato} dice, se vera, “ M si trova in un unico stato in ogni passo di calcolo”

$\varphi_{stato} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \varphi_{stato,i}$ e $\varphi_{stato,i}$ dice, se vera, “M si trova in un unico stato al passo i -simo di calcolo”

$$\varphi_{stato,i} = \left(\bigvee_{q \in Q} S_{i,q} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q \neq q' \in Q} \neg (S_{i,q} \wedge S_{i,q'}) \right)$$

φ_{stato} in CNF

$$\varphi_{\text{stato},i} = \left(\bigvee_{q \in Q} S_{i,q} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q \neq q' \in Q} \neg (S_{i,q} \wedge S_{i,q'}) \right)$$

con la sua equivalente in CNF:

$$\varphi_{\text{stato},i} = \left(\bigvee_{q \in Q} S_{i,q} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q \neq q' \in Q} (\neg S_{i,q} \vee \neg S_{i,q'}) \right)$$

φ_{mossa}

$\rightarrow \varphi_{\text{mossa}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{q \in Q} \varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)}$ dice, se vera, “ogni passo di calcolo è conforme a δ ”
 $\varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)}$ dice, se vera, “l’ i -simo passo di calcolo, con la testina di lettura sulla cella j -sima, è conforme a δ ”

Sia $\delta(q,\alpha) = \{(q_1, \alpha_1, D_1), \dots, (q_m, \alpha_m, D_m)\}$, con $m \geq 1$

$$\varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)} = (H_{i,j} \wedge S_{i,q} \wedge T_{i,j,\alpha}) \Rightarrow \\ ((H_{i+1,j_1} \wedge S_{i+1,q_1} \wedge T_{i+1,j,\alpha_1}) \vee \dots \vee (H_{i+1,j_m} \wedge S_{i+1,q_m} \wedge T_{i+1,j,\alpha_m}))$$

dove se $D_r = L$ allora $j_r = j-1$, se $j > 1$ e $j_r = 1$ se $j = 1$, mentre se $D_r = R$ allora $j_r = j+1$, per $1 \leq r \leq m$.

φ_{mossa} in CNF

$$\varphi_{\text{mossa}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{q \in Q} \varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)}$$

$$\varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)} = (H_{i,j} \wedge S_{i,q} \wedge T_{i,j,\alpha}) \Rightarrow$$

$$((H_{i+1,j_1} \wedge S_{i+1,q_1} \wedge T_{i+1,j,\alpha_1}) \vee \dots \vee (H_{i+1,j_m} \wedge S_{i+1,q_m} \wedge T_{i+1,j,\alpha_m}))$$

La sua versione equivalente in CNF:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{q \in Q} ((\neg H_{i,j} \vee \neg S_{i,q} \vee \neg T_{i,j,\alpha} \vee H_{i+1,j_1}) \wedge$$
$$(\neg H_{i,j} \vee \neg S_{i,q} \vee \neg T_{i,j,\alpha} \vee S_{i+1,q_1}) \wedge (\neg H_{i,j} \vee \neg S_{i,q} \vee \neg T_{i,j,\alpha} \vee T_{i+1,j,\alpha_1})$$
$$\wedge \dots \wedge (\neg H_{i,j} \vee \neg S_{i,q} \vee \neg T_{i,j,\alpha} \vee T_{i+1,j,\alpha_m}))$$

$\varphi_{\text{mossa/nastro}}$ in CNF

→ $\varphi_{\text{mossa/nastro}}$ che dice, se vera, “solo il simbolo in lettura può cambiare in un passo di calcolo”

→ $\varphi_{\text{mossa/nastro}} =$

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j' \neq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (H_{i,j} \wedge T_{i,j',\alpha}) \Rightarrow T_{i+1,j',\alpha}$$

con la sua versione in CNF:

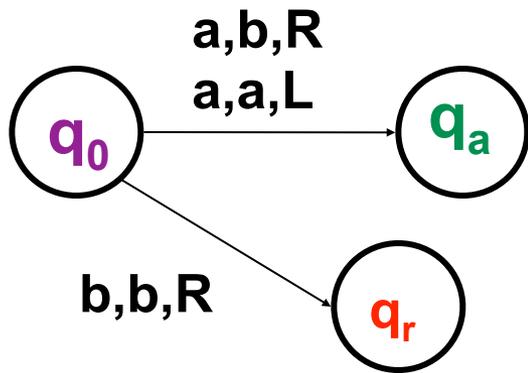
$$\bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j' \neq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (\neg H_{i,j} \vee \neg T_{i,j',\alpha} \vee T_{i+1,j',\alpha})$$

$\varphi_{\text{accettazione}}$ in CNF

→ $\varphi_{\text{accettazione}}$ dice, se vera, “al passo i -simo del calcolo M entra nello stato di accettazione”

$$\varphi_{\text{accettazione}} = \bigvee_{1 \leq i \leq nk} (s_{i, q_a})$$

Esempio di φ -1



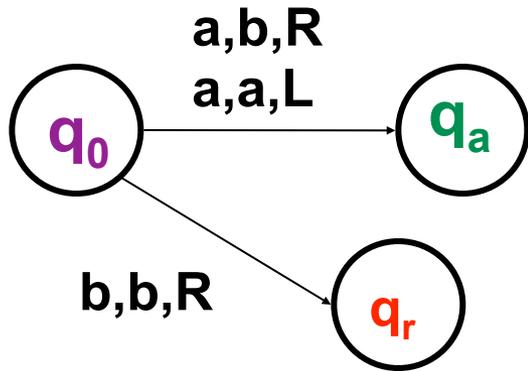
$$\varphi_{\text{start}} = \overset{1}{S}_{1,q_0} \wedge \overset{1}{H}_{1,1} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,\perp}$$

$$\varphi_{\text{testina}} = \varphi_{\text{testina},1} \wedge \varphi_{\text{testina},2}$$

$$\overset{1}{\varphi_{\text{testina},1}} = (\overset{0}{H}_{1,1} \vee H_{1,2}) \wedge \neg (H_{1,1} \wedge H_{1,2})$$

$$\varphi_{\text{testina},2} = (H_{2,1} \vee H_{2,2}) \wedge \neg (H_{2,1} \wedge H_{2,2})$$

Esempio di φ - 2



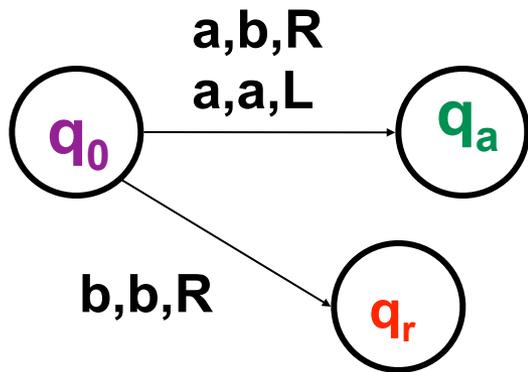
$$\varphi_{\text{start}} = \overset{1}{S}_{1,q_0} \wedge \overset{1}{H}_{1,1} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,\perp}$$

$$\varphi_{\text{nastro}} = \overset{1}{\varphi}_{\text{nastro},1,1} \wedge \overset{0}{\varphi}_{\text{nastro},1,2} \wedge \overset{0}{\varphi}_{\text{nastro},2,1} \wedge \overset{0}{\varphi}_{\text{nastro},2,2}$$

$$\varphi_{\text{nastro},1,1} = (\overset{1}{T}_{1,1,a} \vee \overset{1}{T}_{1,1,b} \vee \overset{1}{T}_{1,1,\perp}) \wedge (\neg(\overset{1}{T}_{1,1,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,b}) \wedge \neg(\overset{1}{T}_{1,1,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,\perp}) \wedge \neg(\overset{1}{T}_{1,1,b} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,\perp}))$$

$$\varphi_{\text{nastro},1,2} = (\overset{1}{T}_{1,2,a} \vee \overset{1}{T}_{1,2,b} \vee \overset{1}{T}_{1,2,\perp}) \wedge (\neg(\overset{1}{T}_{1,2,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,b}) \wedge \neg(\overset{1}{T}_{1,2,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,\perp}) \wedge \neg(\overset{1}{T}_{1,2,b} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,\perp}))$$

Esempio di φ - 3



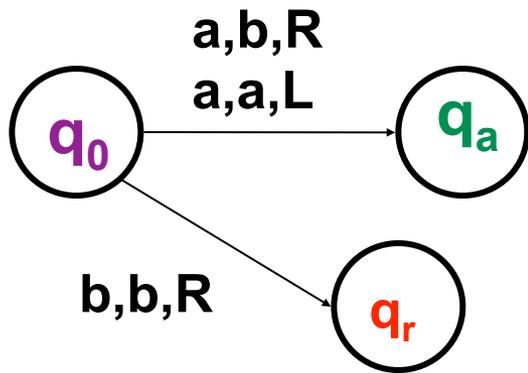
$$\varphi_{\text{start}} = \overset{1}{S}_{1,q_0} \wedge \overset{1}{H}_{1,1} \wedge \overset{1}{T}_{1,1,a} \wedge \overset{1}{T}_{1,2,\perp}$$

$$\varphi_{\text{testina}} = \overset{1}{\varphi}_{\text{testina},1} \wedge \varphi_{\text{testina},2}$$

$$\overset{1}{\varphi}_{\text{testina},1} = (\overset{0}{H}_{1,1} \vee H_{1,2}) \wedge \neg (H_{1,1} \wedge H_{1,2})$$

$$\varphi_{\text{testina},2} = (H_{2,1} \vee H_{2,2}) \wedge \neg (H_{2,1} \wedge H_{2,2})$$

Esempio di φ - 4

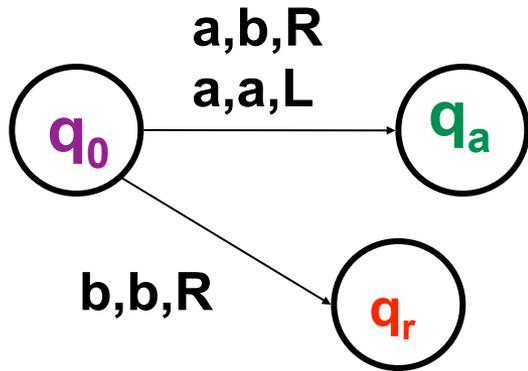


$$\varphi_{\text{start}} = S_{1,q_0} \wedge H_{1,1} \wedge T_{1,1,a} \wedge T_{1,2,\perp}$$

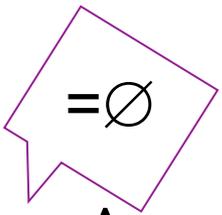
$$\varphi_{\text{stato}} = \varphi_{\text{stato},1} \wedge \varphi_{\text{stato},2}$$

$$\varphi_{\text{stato},1} = (S_{1,q_0} \vee S_{1,q_a} \vee S_{1,q_r}) \wedge (\neg(S_{1,q_0} \wedge S_{1,q_a}) \wedge \neg(S_{1,q_0} \wedge S_{1,q_r}) \wedge \neg(S_{1,q_a} \wedge S_{1,q_r}))$$

Teorema di COOK: esempio di φ -2



$$\varphi_{\text{mossa}} = \varphi_{1,1,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{1,1,\delta(q_0,b)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,b)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{2,1,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{2,1,\delta(q_0,b)} \wedge \varphi_{2,1,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{2,2,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{2,2,\delta(q_0,b)} \wedge \varphi_{2,2,\delta(q_0,\perp)} \wedge \dots$$



$$\varphi_{1,1,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{1,2,\delta(q_0,b)} \wedge$$

$$\varphi_{1,2,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{2,1,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{2,1,\delta(q_0,b)} \wedge$$

$$\varphi_{2,1,\delta(q_0,\perp)} \wedge \varphi_{2,2,\delta(q_0,a)} \wedge \varphi_{2,2,\delta(q_0,b)} \wedge$$

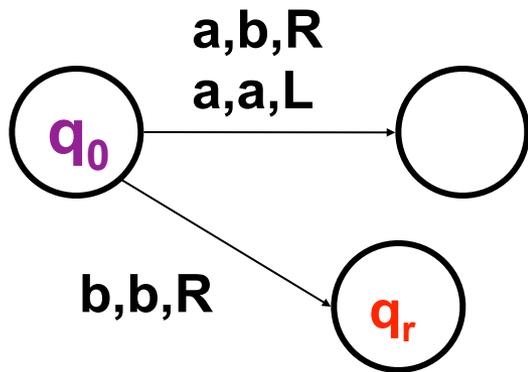
$$\varphi_{2,2,\delta(q_0,\perp)} \wedge \dots$$

$$\varphi_{1,1,\delta(q_0,a)} =$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ ((H_{1,1} \wedge S_{1,q_0} \wedge T_{1,1,a}) \Rightarrow (H_{2,2} \wedge S_{2,q_a} \wedge T_{2,1,b}) \vee (H_{2,1} \wedge S_{2,q_a} \wedge T_{2,1,a})) \end{matrix}$$

$$\varphi_{1,1,\delta(q_0,b)} = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ((H_{1,1} \wedge S_{1,q_0} \wedge T_{1,1,b}) \Rightarrow (H_{2,2} \wedge S_{2,q_r} \wedge T_{2,1,b})) \end{matrix}$$

Teorema di COOK: esempio di φ -2



$$\begin{aligned}
 \varphi_{\text{mossa/nastro}} &= (\overset{1}{H_{1,1}} \wedge \overset{1}{T_{1,2,\perp}}) \Rightarrow \overset{1}{T_{2,2,\perp}} \\
 &\wedge (\overset{1}{H_{1,1}} \wedge \overset{1}{T_{1,2,b}}) \Rightarrow \overset{1}{T_{2,2,b}} \wedge \\
 &(\overset{1}{H_{1,1}} \wedge \overset{1}{T_{1,2,a}}) \Rightarrow \overset{1}{T_{2,2,a}} \wedge \\
 &(\overset{1}{H_{1,2}} \wedge \overset{1}{T_{1,1,a}}) \Rightarrow \overset{1}{T_{2,1,a}} \wedge \\
 &(\overset{1}{H_{1,2}} \wedge \overset{1}{T_{1,1,b}}) \Rightarrow \overset{1}{T_{2,1,b}} \dots
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{\text{accettazione}} = (\overset{1}{S_{1,q_a}} \vee \overset{1}{S_{2,q_a}})$$

Teorema di COOK: complessità

Abbiamo visto che $x \in A$ sse $\varphi \in \text{SAT}$, perchè se x è in A allora ha un cammino di accettazione in T e quindi possiamo costruire un assegnamento di verità per φ , d'altro canto se $\varphi \in \text{SAT}$ all'assegnamento di valori di verità corrisponde un cammino di accettazione per x .

La formula φ ha lunghezza $O(n^{2k})$ perchè il numero degli stati o dei simboli di nastro sono costanti, mentre il numero delle occorrenze delle variabili è $O(n^{2k})$.
Guardiamo per esempio:

$$\varphi_{\text{mossa}} = \bigwedge_{1 \leq i \leq nk} \bigwedge_{1 \leq j \leq nk} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bigwedge_{q \in Q} \varphi_{i,j,\delta(q,\alpha)}$$

e notiamo che il numero di letterali è $O(n^{2k})$.