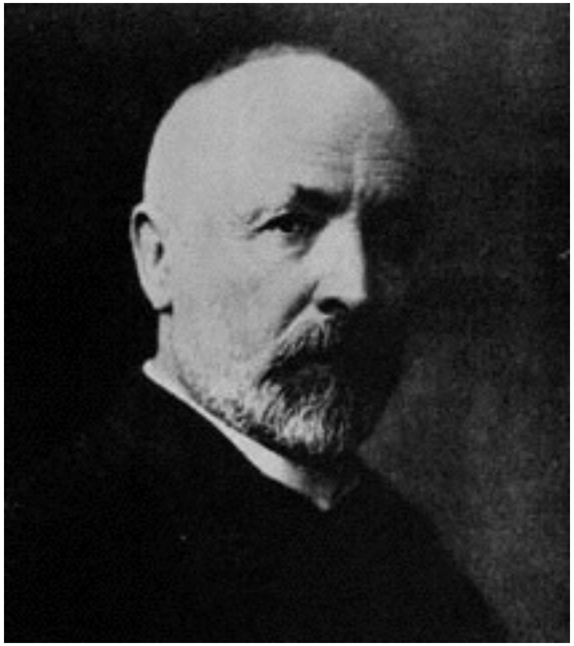
Sommario

- Esistenza problemi indecidibili.
- Il metodo della diagonalizzazione di Cantor
- L’autoreferenzialità

La diagonalizzazione.

Ricorderete che Georg Cantor ha inventato il metodo della diagonalizzazione per dimostrare che i numeri reali hanno una cardinalità diversa da quella dei naturali.



Georg Cantor (1845 -1918)

Numerabilità

Un insieme infinito è numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali.

Esempio: Sia P l'insieme dei numeri pari, la funzione $f : N \rightarrow P$, tale che $f(n) = 2n$ è una corrispondenza biunivoca.

x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6.	12
	...

$f : X \rightarrow Y$ è una biezione o è biunivoca se

- $\forall x,u$ in X $x \neq u \Rightarrow f(x) \neq f(u)$ (iniettività)
- $\forall y$ in Y $\exists$ x in X tale che $f(x) = y$ (suriettività)

Numerabilità - 2

Esempio: Sia N^+ l'insieme dei numeri positivi, la funzione $f : N \rightarrow N^+$, tale che $f(n) = n+1$ è una corrispondenza biunivoca.

x	f(x)
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6.	7
	...

Un insieme X si dice <u>e</u>numerabile quando esiste una corrispondenza biunivoca <u>calcolabile</u> tra X e l'insieme dei numeri naturali. Una funzione è calcolabile se esiste un algoritmo che la calcola.

Per dimostrare che un insieme è numerabile basta dimostrare l'esistenza di una corrispondenza biunivoca con i naturali anche senza fornirla!

Non numerabilità dei reali

Prova per assurdo. Supponiamo che R sia numerabile, allora esiste una funzione biunivoca f: $N^+ \rightarrow R$ che può essere rappresentata in una tabella del tipo:

x	f(x)
1	7.$\underline{4}$875690. . .
2	33.3$\underline{3}$33333 . . .
3	0.83$\underline{6}$2719 . . .
4	65.497$\underline{1}$652 . . .
5	0.3384$\underline{6}$15 . . .
6	0.34426$\underline{2}$3 . . .
	...

Costruiamo un numero reale che non può essere nell'elenco, contraddicendo la suriettività della funzione f.

y = 0, 5 4 2 5 5 1 ...

y non può stare nell'elenco perchè per ogni k, la sua k-sima cifra decimale è diverso dalla k-sima cifra decimale del k-simo numero nell'elenco.

Numerabilità delle parole

Definiamo l'ordine canonico o quasi-lessicografico sulle parole:

Ordiniamo le lettere dell'alfabeto, poi estendiamo l'ordine alle parole come segue:

$$x < y \text{ se } \begin{cases} |x|<|y| \text{ oppure} \\ |x| = |y| \text{ e } x \text{ precede } y \text{ nell' ordine lessicografico} \\ \text{determinato dall'ordinamento sulle lettere.} \end{cases}$$

L'ordinamento è totale e produce una corrispondenza biunivoca con N.

Potremmo anche parlare di enumerabilità, visto che la corrispondenza è calcolabile.

Non numerabilità dei linguaggi

Un linguaggio può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sequenza binaria di lunghezza <u>infinita</u>.

Esempio1: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Σ^* =	ε	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	baa	...	bbb	aabb	...
f(L) =	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...	0	1	....

Esempio2: $\Sigma = \{a,b\}$, $L = \{ ab^n \mid n \geq 0\}$

Σ^* =	ε	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	baa	...	bbb	...	abbb	...
f(L) =	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	...	0	...	1	...

Non numerabilità delle sequenze binarie di lunghezza infinita

Di nuovo per assurdo, supponiamo che sia numerabile e applichiamo il metodo della diagonalizzazione

x	f(x)
1	000111101 . .
2	111100101 . . .
3	100001101 . . .
4	010001111 . . .
5	000110101 . . .
6.	101000001 . . .
	...

Ma y = 1 0 1 1 0 1 ...

non può essere in elenco, perchè per ogni i, l'i-sima sequenza binaria di lunghezza infinita differisce da y nella i-sima posizione.

Esistenza di problemi per i quali non esistono algoritmi

1. **Un algoritmo è una stringa di lunghezza finita. Quindi disponiamo di un'infinità numerabile di algoritmi.**

2. **Ogni problema di decisione può essere visto come un linguaggio, quello delle stringhe che descrivono istanze con soluzione SI. Quindi l'insieme dei problemi ha la cardinalità del continuo.**

Conclusione: necessariamente esistono dei problemi per i quali non c'è un algoritmo

Esistenza di problemi per i quali non esistono algoritmi

Ma vorremmo poter esibire un particolare problema per il quale non esiste un algoritmo.

Per arrivare a questo Turing sfruttò il metodo di Cantor e l'autoreferenzialità.

Teoria ingenua degli insiemi

- **Un insieme è una collezione di elementi.**

Più precisamente,da http://mathworld.wolfram.com/Set.html).
Un insieme è una collezione finita o infinita di oggetti, che condividono una proprietà in cui ordine e molteplicità sono ignorati. (assioma di comprensione)

Esempi: gli interi, {x | x è un intero primo}, {2,5,9}, {aa,ba,bb},...

La teoria degli insieme nasce con la pubblicazione dell' articolo di Georg Cantor in 1874:
"On a Characteristic Property of All Real Algebraic Numbers".

Autorefenzialità e antinomia di Russel (1901-1902)

Consideriamo i seguenti insiemi:

A = l'insieme di tutti gli insiemi finiti

B = l'insieme di tutti gli insiemi infiniti

C = l'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi

Domande

$A \in A$?	no
$B \in B$?	sì
$A \in C$?	sì
$B \in C$?	no
$C \in C$?	?

Esercizio sulla numerabilità

Si dimostri che l'insieme dei linguaggi regolari è numerabile e che quello dei linguaggi non regolari non è numerabile.

Si definisca una funzione di enumerazione per l'insieme delle stringhe binarie, cioè una funzione calcolabile che le numera, nell’ordine canonico.

Esercizio 2 sulla numerabilità

Sia B l'insieme delle sequenze binarie di lunghezza infinita.

Sappiamo che B non è numerabile.

Sia C = {x | x in B e $n_1(x) \leq 25$}, dove $n_1(x)$ è il numero di occorrenze di 1 in x.

Si dimostri che C è numerabile.