Sommario

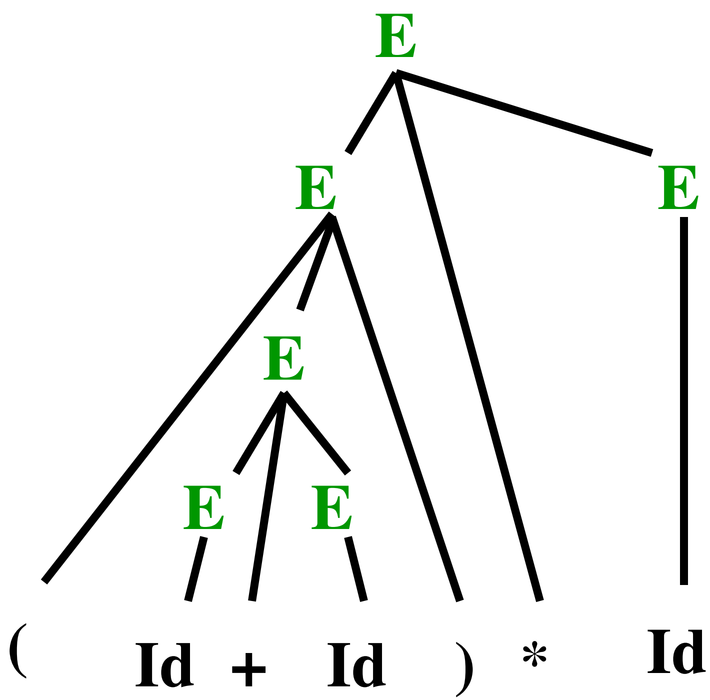
Introduzione, definizioni ed esempi di grammatiche acontestuali (context-free)

SINTASSI ESPRESSIONI ARITMETICHE (semplificate)

$E \rightarrow E+E$
$E \rightarrow E*E$
$E \rightarrow (E)$
$E \rightarrow Id$

Esempio di derivazione:

$E \Rightarrow E*E \Rightarrow (E)*E \Rightarrow (E)*Id$
$\Rightarrow (E+E)*Id \Rightarrow (Id+E)*Id$
$\Rightarrow (Id+Id)*Id$



SINTASSI identificatori in PYTHON (da https://www.python.org)

identifier :: = (letter | "_") (letter | digit | "_")*
letter ::= lowercase | uppercase
lowercase ::= "a" | … | "z"
uppercase ::= "A" | … | "Z"
digit ::= "0"| … | "9"

Letto come CFG:

ident $\rightarrow$ letter ident1 | _ ident1
ident1 $\rightarrow$ ε | letter | digit | letter ident1 |digit ident1 | _ ident1
il resto non cambia

SINTASSI identificatori in PYTHON (da https://www.python.org)

ident → letter ident1 | _ ident1

ident1 → ε | letter | digit | letter ident1 |digit ident1 | _ ident1

letter ::= lowercase | uppercase

lowercase ::= “a” | … | “z”

uppercase ::= “A” | … | “Z”

digit ::= “0”| … | ”9”

Esempio di derivazione:

ident ⇒ letter ident1 ⇒ a ident1 ⇒ a letter ident1

⇒ a b ident1 ⇒ ab_ident1 ⇒ ab_ letter ident1

⇒ ab_c ident1⇒ ab_c digit ident1 ⇒ ab_c9 ident1⇒ ab_c9

SINTASSI PYTHON (da https://docs.python.org/2/reference/grammar.html)

```
single_input: NEWLINE | simple_stmt | compound_stmt NEWLINE
…

simple_stmt: small_stmt (';' small_stmt)* [';'] NEWLINE

small_stmt: (expr_stmt | print_stmt  | del_stmt | pass_stmt | flow_stmt |
             import_stmt | global_stmt | exec_stmt | assert_stmt)

…
del_stmt: 'del' exprlist
…

assert_stmt: 'assert' test [',' test]
```

ESEMPI

G1 : $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^n S b^n \Rightarrow a^n b^n$$

G2 : $S \rightarrow LSR \mid SS \mid LR$

$L \rightarrow ($

$R \rightarrow)$

derivazione leftmost (più a sinistra)

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow LSRS \Rightarrow (SRS \Rightarrow (LRRS \Rightarrow^* (())S$$
$$\Rightarrow (())LR \Rightarrow^* (())()$$

DEFINIZIONE FORMALE

Una grammatica context-free (acontestuale), in breve CFG (Context-Free Grammar), è una quadrupla $G = (T,V,S,P)$ dove

- T e V sono insiemi finiti e disgiunti tra loro, rispettivamente dei Terminali e delle Variabili,
- S è una variabile speciale detta simbolo iniziale e
- P è l' insieme delle Produzioni (le regole di riscrittura) e contiene elementi della forma $A \rightarrow v$, dove A è una variabile (o nonterminale) e v è una stringa su $(T \cup V)^*$, quindi di variabili e terminali.

DERIVAZIONI

Data una CFG $G = (T,V,S,P)$ e x in $(T \cup V)^*$,

la produzione $B \rightarrow v$ è **applicabile** a x

se B occorre in x,

cioè se $x = yBz$ per due stringhe y e z in $(T \cup V)^*$,

il risultato dell'applicazione di $B \rightarrow v$ a x è la

stringa $w = yvz$

ottenuta sostituendo B con v in x, in tal caso w è stata derivata in un passo da x,

$$yBz \Rightarrow_G yvz$$

$\Rightarrow_G^*$ è la chiusura riflessiva e transitiva di $\Rightarrow_G$.

IL LINGUAGGIO GENERATO

Data una CFG G = (T,V,S,P) il linguaggio generato da G è

$$L(G) = \{x \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}.$$

G1 : $S \rightarrow aSb \mid \varepsilon$

$L(G1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

G2 : $S \rightarrow LSR \mid SS \mid LR$

$L \rightarrow ($

$R \rightarrow)$

L(G2) è l'insieme delle parentesi ben formate

Esempio 1

$G : S \rightarrow aSa \mid bSb \mid c$

$L(G) = \{xc\,rev(x) \mid x \text{ in } \{a,b\}^*\}$

Esempio 2

$L = \{a^m b^n \mid m \geq n \geq 0\}$

$G : S \rightarrow aSb \mid aA \mid \varepsilon$

$\quad A \rightarrow aA \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow a^2Sb^2 \Rightarrow^* a^n b^n$ il caso m=n>0

$\Searrow^* a^n S b^n \Rightarrow a^{n+1} A b^n \Rightarrow^* a^{p+n} b^n$ il caso m>n>0, p>0

$\Searrow aA \Rightarrow^* a^{m-1} A \Rightarrow a^m$ il caso n=0 e m>0

$S \Rightarrow \varepsilon$ il caso m=n=0

Quindi L= L(G).

Esempio 2bis

$L = \{a^m b^n \mid m>n>0\}$ $\quad G : S \rightarrow aSb \mid aS \mid aab$

Caso 1: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow a^2Sb^2 \Rightarrow^* a^rSb^r \Rightarrow a^raabb^r$

Qui $m = r+2$, $n = r+1$, $r\geq 0$

Caso 2: $S \Rightarrow^* a^rS \Rightarrow a^raab$ con $r\geq 0$

Caso 3: $S \Rightarrow^* a^rS \Rightarrow a^raSb \Rightarrow^* a^{r+s}Sb^s \Rightarrow a^{r+s}aabb^s$

Qui $m = r+s+2$, $n = s+1$, $r\geq 0$, e $s\geq 0$.

Allora se $x = a^mb^n$, x è generata da G perché $x = a^ra^nb^n$ con $r\geq 1$ e $n\geq 1$ e quindi

se $r=1$ e $n\geq 1$ la parola è generata nel caso 1, se $r\geq 1$ e $n=1$, siamo nel caso 2, altrimenti se $r\geq 1$ e $n\geq 2$ siamo nel caso 3

Esempio 2bis

$L = \{a^m b^n \mid m > n > 0\}$

$G: S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow aBb \mid ab$

$A \Rightarrow aA \Rightarrow^* a^r A \Rightarrow a^r a$ con $r \geq 0$

$B \Rightarrow^* a^s B b^s \Rightarrow a^{s+1} b^{s+1}$ con $s \geq 0$

$S \Rightarrow AB \Rightarrow^* a^r a a^{s+1} b^{s+1}$ con $r \geq 0$ e $s \geq 0$

Quindi $L = L(G)$.

Esempio 3

$L(G) = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, \text{ con } i,j,k \geq 0\}$

$G: S \rightarrow AD \mid CB \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$

$D \rightarrow Dc \mid \varepsilon$

$C \rightarrow Ca \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow aAbD \Rightarrow^* a^n b^n D \Rightarrow a^n b^n$

$S \Rightarrow CbBc \Rightarrow^* bBc \Rightarrow^* b^n c^n$

$S \Rightarrow AD \Rightarrow^* c^m$

$S \Rightarrow CB \Rightarrow^* a^m$

$S \Rightarrow aAbD \Rightarrow^* a^n b^n D \Rightarrow^* a^n b^n c^m$

$S \Rightarrow CbBc \Rightarrow^* a^n b^m B c^m \Rightarrow^* a^n b^m c^m$

Esempio 3

$L(G) = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, \text{ con } i,j,k \geq 0\}$

$$
\begin{aligned}
G : S &\rightarrow aAbD \mid CbBc \mid \varepsilon \\
A &\rightarrow aAb \mid \varepsilon \\
B &\rightarrow bBc \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow Dc \mid \varepsilon \\
C &\rightarrow Ca \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Nota che $S \Rightarrow aAbD \Rightarrow^* a^n b^n D \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

$S \Rightarrow CbBc \Rightarrow^* a^n bBc \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

Esempio 4

$L(G) = \{a^i b^j c^k \mid i+j=k, \text{ con } i,j,k \geq 0\}$

$G : S \rightarrow aAc \mid bBc \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aAc \mid bBc \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow aAc \Rightarrow^* a^iAc^i \Rightarrow a^ibBcc^i \Rightarrow^* a^ib^jBc^jc^i \Rightarrow a^ib^jc^{i+j}$

$\Rightarrow bBc \Rightarrow^* b^jBc^j \Rightarrow b^jc^j$, il caso i=0

$\Rightarrow aAc \Rightarrow^* a^iAc^i \Rightarrow a^ic^i$, il caso j=0

$S \Rightarrow \varepsilon$ il caso i=j=0

Esempio

L(G) = { w | w in {a,b}* e in cui ogni prefisso ha un numero di a maggiore o uguale a quello delle b}

$G : S \rightarrow aSbS \mid aA \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$

$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* aaSbSbS \Rightarrow^* a^nSbSbS \ldots SbS$ (n volte)

$\Rightarrow^* a^nb^n$

$a^nSbSbS \ldots SbS$ (n volte) $\Rightarrow a^naAbSbS \ldots SbS$

$\Rightarrow^* a^na^mbSbS \ldots SbS$

$a^nSbSbS \ldots SbS$ (n volte) $\Rightarrow^* a^nbaAbS \ldots SbS$

Esercizio su PDA

Costruire un PDA che accetta

$L = \{ a^i b^j c^k \mid e\ 0 \leq i+j \leq k\}$

e uno che accetta

$L = \{a^i b^j c^k \mid i=j \text{ o } j=k, \text{ con } i,j,k \geq 0\}$