Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 2-3 Marzo 2010

Esercizio 1. *Dati due eventi A e B, scrivete, in termini di operazioni booleane, l'espressione dell'evento:*

$$\{\textit{si verifica esattamente un solo evento fra } A \textit{ e } B\}.$$

Risposta 1. $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ *oppure* $(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

Esercizio 2. *Siano A, B e C eventi. Scrivete le espressioni degli eventi:*

a) almeno due tra questi si verificano;

b) esattamente due tra questi si verificano;

c) al più due tra questi si verificano;

d) esattamente uno tra questi si verifica.

Risposta 2. *a)* $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ *oppure* $\overline{A \cap B \cap C}$

d) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$

Esercizio 3. *Un'urna contiene esattamente 3 elementi di tipo A e 2 elementi di tipo B; da tale urna si effettuano 2 successive estrazioni senza reinserimento, registrando il tipo dell'elemento via via estratto.*

a) Elencate gli eventi elementari in questo esperimento e contate quanti sono.

b) Quanti sono, fra tali eventi elementari, quelli che realizzano l'evento

$$\{\textit{almeno un elemento di tipo } B \textit{ fra i 2 elementi estratti}\}?$$

c) Quali e quanti sono, fra tali eventi elementari, quelli che realizzano l'evento

$$\{\textit{almeno un elemento di tipo } B\} \cup \{\textit{l'elemento estratto alla seconda estrazione è di tipo } B\}?$$

Risposta 3. *a)* $\Omega = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$, $|\Omega| = 4$

b) $\{$*almeno un elemento di tipo B fra i 2 elementi estratti*$\} = \{(A, B), (B, A), (B, B)\}$, *composto da 3 eventi elementari*

c) $\{(A, B), (B, A), (B, B)\}$

Esercizio 4. *Si lanciano 3 dadi. Trovare la probabilità di avere*

1. *3 numeri uguali;*
2. *3 numeri diversi;*
3. *nell'ordine, 2 numeri uguali tra loro e il terzo diverso.*

Risposta 4.
1. $\frac{1}{36}$
2. $\frac{5}{9}$
3. $\frac{5}{36}$

Esercizio 5. *Un bambino gioca con 12 legnetti colorati, di cui 6 neri, 4 rossi, 1 bianco e 1 blu. In quanti modi può allinearli?*

Risposta 5. $\frac{10!12!}{6!4!}$

Esercizio 6. *In quanti modi 12 persone possono suddividersi in 3 gruppi, formati rispettivamente da 3, 4 e 5 persone?*

Risposta 6. $\frac{12!}{3!4!5!}$

Esercizio 7. *Una squadra di danza è composta da 22 ballerini, di cui 10 maschi e 12 femmine. In quanti modi possono formarsi 5 coppie? (N.B.: L'ordine in cui si formano tali coppie non è rilevante)*

Risposta 7. $\frac{10!12!}{5!5!5!}$

Esercizio 8. *In un mazzo di n chiavi ce ne sono 2 che aprono una porta; si cerca di aprirla provando successivamente tutte le chiavi.*
Calcolare la probabilità di riuscire al k-esimo tentativo.
E se le chiavi adatte fossero r $(2 < r \leq n)$*?*

Risposta 8. $\frac{(n-r)!}{(n-r-k+1)!}\frac{(n-k)!}{n!}r$, *per* $2 \leq r \leq n,\ 2 \leq k \leq n-r$;

0, per $k > n-r$.

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 9-10 Marzo 2010

Esercizio 1. *Quanti sono i possibili anagrammi delle parole RUOTA e MISSISSIPPI?*

Risposta 1. $5!$, $\dfrac{11!}{4!4!2}$

Esercizio 2. *Le lettere AAMMM vengono ordinate a caso. Calcolare la probabilità di ottenere la parola MAMMA.*

Risposta 2. $\dfrac{1}{10}$

Esercizio 3. *In una fila di 6 sedili devono sedersi 6 studenti, 3 maschi e 3 femmine.*

- *In quanti modi possono sedersi nei vari casi?*
  - *a) Senza restrizioni;*
  - *b) maschi vicini tra loro e femmine vicine tra loro;*
  - *c) maschi vicini tra loro;*
  - *d) studenti dello stesso sesso non devono stare vicini.*
- *Se si dispongono casualmente, calcolare la probabilità che*
  - *e) i maschi capitino tutti vicini;*
  - *f) studenti dello stesso sesso non capitino vicini;*

Risposta 3. *a)* $6!$

b) $2 \cdot 3!3!$

c) $4!3!$

d) $2 \cdot 3!3!$

e) $\dfrac{1}{5}$

f) $\dfrac{1}{10}$

Esercizio 4. *Da un'urna, che contiene 6 oggetti numerati da 1 a 6, si estraggono a caso tre oggetti contemporaneamente. Calcolare la probabilità che il minimo numero estratto sia superiore a 2.*

Risposta 4. $\dfrac{1}{5}$

Esercizio 5. *Per ogni ruota vengono estratte (senza ripetizione) 5 palline da un'urna che ne contiene 90, numerate da 1 a 90.*
Calcolare la probabilità che, in una data settimana, sulla ruota di Roma,

1. *il primo numero estratto sia il 37;*
2. *il secondo numero estratto sia il 37;*
3. *il primo e il secondo estratto siano rispettivamente 37 e 51;*
4. *vengano estratti, rispettivamente, un dato ambo, un dato terno, una data quaterna, una data cinquina.*

Risposta 5. *1.* $\frac{1}{90}$

2. $\frac{1}{90}$

3. $\frac{1}{90}\frac{1}{89}$

4. $\frac{5!88!}{3!90!}, \frac{5!87!}{2 \cdot 90!}, \frac{5!86!}{90!}, \frac{5!85!}{90!}$

Esercizio 6. *Si estraggono con reinserimento 4 palline da un'urna che ne contiene 3 bianche e 3 nere. Calcolare la probabilità che esattamente 2 siano bianche.*

Risposta 6. $\frac{3}{8}$

Esercizio 7. *(Seguito Es. 5, 2-3/03) Un bambino gioca con 12 legnetti colorati, di cui 6 neri, 4 rossi, 1 bianco e 1 blu. Calcolare la probabilità che li allinei mettendo*

1. *in successione: tutti i neri, tutti i rossi, il bianco e il blu;*
2. *vicini i legnetti di ciascun colore.*

Risposta 7. *1.* $\frac{6!4!}{12!}$

2. $\frac{6!4!4!}{12!}$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 16-17 Marzo 2010

Esercizio 1. *Si fanno n lanci di una moneta perfetta. Per $1 \leq h \leq n$, calcolare la probabilità di ottenere il risultato testa*

1. *all'h-esimo lancio;*
2. *per la prima volta all'h-esimo lancio.*

Risposta 1.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{2^h}$

Esercizio 2. *Siano A, B eventi tali che $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.*

a) Quanto vale $P(A) + P(B)$?

b) Qual è il valore massimo che può assumere $P(A)$?

c) Qual è il valore minimo che può assumere $P(A)$?

Imponiamo l'ulteriore condizione $P(A) = P(B)$.

d) Quanto vale $P(A)$?

e) Quanto vale $P(A^C \cup B^C)$?

f) Quanto vale $P(A^C \cap B^C)$?

Risposta 2.

a) $\frac{4}{3}$

b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

f) 0

Esercizio 3. *Un numero di telefono di 6 cifre viene composto digitando a caso sulla tastiera (10 tasti). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*

a) il numero composto è 121212 o 094816;

b) il numero composto non contiene il 6;

c) il numero composto contiene solo cifre pari;

d) il numero composto contiene la stringa 2345;

e) il numero composto contiene la stringa 2222.

Risposta 3. *a)* $\dfrac{2}{10^6}$

b) $\left(\dfrac{9}{10}\right)^6$

c) $\dfrac{1}{64}$

d) $\dfrac{3}{10^4}$

e) $\dfrac{28}{10^5}$

Esercizio 4. *Uno studente possiede 4 libri di algebra, 7 di analisi e 5 di geometria. I libri vengono disposti a caso su uno scaffale. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*

a) il primo libro a sinistra è di geometria e il secondo di algebra;

b) i libri di ogni materia sono contigui;

c) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico, ma non necessariamente contigui;

d) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico e contigui.

Risposta 4. *a)* $\dfrac{1}{12}$

b) $\dfrac{3!4!5!7!}{16!}$

c) $\dfrac{1}{4!5!7!}$

d) $\dfrac{6}{16!}$

Esercizio 5. *Una borsa di studio viene attribuita nel seguente. Ogni membro di una commissione di 3 persone mette in ordine i candidati secondo la sua valutazione. La borsa viene attribuita al candidato (se esiste) che risulta primo in almeno due liste. Al concorso per la borsa partecipano 3 studenti: Aldo, Beatrice e Carlo. I 3 commissari decidono a caso (ognuno indipendentemente dall'altro) l'ordine dei tre.*
Calcolare la probabilità che

a) Aldo riceva la borsa;

b) la borsa venga attribuita.

Risposta 5. *a)* $\frac{7}{27}$

b) $\frac{7}{9}$

Esercizio 6. *Una città con 100000 abitanti ha 3 quotidiani: A, B e C, dove A e C sono i quotidiani del mattino e B è il quotidiano della sera. La percentuale di lettori di questi giornali è la seguente:*
A: 10%, B: 30%, C: 5%, A e B: 8%, A e C: 2%, B e C: 4%, A, B e C: 1%.
Trovare il numero di persone che

a) leggono un solo quotidiano;

b) leggono almeno 2 quotidiani;

c) leggono almeno un quotidiano del mattino oltre a quello della sera;

d) non leggono alcun giornale;

e) leggono un solo quotidiano del mattino e quello della sera.

Risposta 6. *a) 20000*

b) 12000

c) 11000

d) 68000

e) 10000

Esercizio 7. *Si devono selezionare 5 studenti di una classe di 30 studenti per assegnare dei premi distinti. In quanti modi si possono selezionare gli studenti se*

1. uno studente può ricevere più premi?

2. uno studente può ricevere al più un premio?

Risposta 7. *1.* 30^5

2. $\frac{30!}{25!}$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 23-24 Marzo 2010

Esercizio 1. *Un'urna contiene 12 palline, di cui 8 bianche. Se ne estraggono 4 a caso. Considerando i due casi dell'estrazione con e senza reinserimento, determinare la probabilità che la prima pallina estratta e la terza siano bianche, sapendo che in tutto sono state estratte 3 palline bianche.*

Risposta 1. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

Esercizio 2. *Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità che almeno uno dia 6, sapendo che i dadi danno due numeri diversi.*

Risposta 2. $\frac{1}{3}$

Esercizio 3. *Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità che il primo dia 6, sapendo che la somma dei punteggi è i (calcolarla per i compreso tra 2 e 12).*

Risposta 3. $i \in 2, \ldots, 6: \ 0$; $i = 7 : \frac{1}{6}$, $i = 8 : \frac{1}{5}$, $i = 9 : \frac{1}{4}$, $i = 10 : \frac{1}{3}$, $i = 11 : \frac{1}{2}$, $i = 12 : 1$.

Esercizio 4. *Una coppia ha 2 bambini. (Assumiamo, ora e in seguito, che la probabilità che un bambino sia maschio o femmina sia la stessa). Calcolare la probabilità che siano entrambe femmine, sapendo che il primogenito è una femmina.*

Risposta 4. $\frac{1}{2}$

Esercizio 5. *La probabilità che una nuova batteria dell'auto funzioni per più di 20000 Km è 0.8, per più di 40000 Km è 0.4, per più di 60000 Km 0.1.*
Se una batteria nuova funziona ancora dopo 20000 Km, calcolare la probabilità che

1. *la sua vita totale superi i 40000 Km;*
2. *la sua vita residua superi i 40000 Km.*

Risposta 5.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{8}$

Esercizio 6. *Abbiamo sul tavolo due monete non equilibrate: la prima dà testa con probabilità 0,4, la seconda con probabilità 0,7. Scegliamo a caso una moneta e la lanciamo 10 volte. Calcolare la probabilità che*

1. *esattamente 7 lanci diano testa;*

2. *esattamente 7 lanci diano testa, dato che il primo ha dato testa.*

Risposta 6. 1. $\dfrac{10!}{3!7!}\left(\dfrac{11}{20}\right)^7\left(\dfrac{9}{20}\right)^3$

2. $P(\textit{esattamente 7 lanci diano testa}|\textit{il primo ha dato testa}) = \dfrac{9!}{3!6!}\left(\dfrac{13}{21}\right)^6\left(\dfrac{8}{21}\right)^3.$

Esercizio 7. *Viene lanciata 10 volte una moneta non equilibrata, che dà testa con probabilità p. Condizionatamente ad aver ottenuto 6 teste sui 10 lanci, determinare la probabilità che i primi 3 lanci abbiano dato $T\ C\ C$ o $C\ T\ C$.*

Risposta 7. $\dfrac{2}{5}$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 7 Aprile 2010

Esercizio 1. *Se lanciamo un dado 4 volte, calcolare la probabilità che il 6 compaia*

1. *almeno una volta;*
2. *esattamente 2 volte;*
3. *almeno 3 volte.*

Risposta 1.

1. *0,517*
2. $\frac{150}{1296}$
3. $\frac{21}{1296}$

Esercizio 2. *Una professoressa assegna agli studenti 10 problemi, informandoli che l'esame consisterà in 5 di questi scelti a caso. Se uno studente è riuscito a risolverne 7, calcolare la probabilità che risponda esattamente a*

1. *5 dei problemi dell'esame;*
2. *almeno 4 dei problemi dell'esame.*

Risposta 2.

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{1}{2}$

Esercizio 3. *In un test a risposta multipla, con 3 possibili risposte per ognuna delle 5 domande, calcolare la probabilità che uno studente risponda correttamente a 4 o più domande tentandole in maniera casuale.*

Risposta 3. $\frac{11}{3^5}$

Esercizio 4. *Due squadre di scacchi sono formate rispettivamente da 8 e 9 giocatori. Da ognuna di esse, ne vengono selezionati in maniera casuale 4, per partecipare ad una gara. Le coppie vengono formate abbinando in maniera casuale ogni giocatore selezionato dalla prima squadra con un giocatore selezionato dalla seconda squadra.*
Rebecca ed Elisa fanno parte ognuna di una squadra. Calcolare la probabilità che

1. *solo una tra Rebecca ed Elisa sia scelta per la gara;*
2. *entrambe siano scelte, ma non giochino una contro l'altra;*
3. *giochino una contro l'altra.*

Risposta 4. 1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{6}$

3. $\frac{1}{18}$

Esercizio 5. *Supponiamo che la probabilità che un figlio sia maschio o femmina sia uguale.*
Una coppia ha 5 figli; calcolare la probabilità che

1. *tutti i figli siano dello stesso sesso;*
2. *i 3 maggiori siano maschi e le altre femmine;*
3. *vi siano esattamente 3 maschi;*
4. *i 2 maggiori siano femmine;*
5. *vi sia almeno una femmina.*

Risposta 5. 1. $\frac{1}{16}$

2. $\frac{1}{32}$

3. $\frac{5}{16}$

4. $\frac{1}{4}$

5. $\frac{31}{32}$

Esercizio 6. *Due fabbriche, A e B, producono radio. Ogni radio prodotta dalla fabbrica A è difettosa con probabilità 0,05, mentre ogni radio prodotta dalla fabbrica B è difettosa con probabilità 0,01. Supponiamo di aver acquistato due radio prodotte dalla stessa fabbrica, che può essere con uguale probabilità A o B. Se la prima radio è difettosa, calcolare la probabilità che lo sia anche la seconda.*

Risposta 6. $\frac{13}{300}$

Esercizio 7. *Il 45% degli elettori di un comune si ritiene di centro, il 30% di sinistra e il 25% di destra. Nell'ultima elezione si sono recati a votare il 40% degli elettori di centro, il 50% di quelli di sinistra e il 60% di quelli di destra. Un elettore è estratto a caso. Sapendo che ha votato nelle ultime elezioni, calcolare la probabilità che si tratti di un elettore*

1. di centro;

2. di sinistra;

3. di destra.

Risposta 7. *1.* $\dfrac{3}{8}$

2. $\dfrac{5}{16}$

3. $\dfrac{25}{80}$

Quale percentuale di elettori ha partecipato all'ultima elezione? $\dfrac{12}{25}$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 27-28 Aprile 2010

Esercizio 1. *Due palline vengono scelte a caso, senza reinserimento, in un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo che si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda 1 per ogni pallina bianca.*

1. *Sia X la vincita. Quali sono i possibili valori di X e con quale probabilità vengono ottenuti?*
2. *Siano Y il numero di palline nere estratte e Z il numero di palline bianche estratte. Determinare la densità discreta di Y e di Z e il loro valore atteso.*
3. *Calcolare il valore atteso di X.*
   Risolvere quest'ultimo punto in due modi: sia sfruttando la proprietà di linearità sia utilizzando la densità discreta di X.

Risposta 1.

1. $X \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$$P(X = -2) = \frac{4}{13},\ P(X = -1) = \frac{16}{91},\ P(X = 0) = \frac{1}{91},$$
$$P(X = 1) = \frac{32}{91},\ P(X = 2) = \frac{8}{91},\ P(X = 3) = 0,\ P(X = 4) = \frac{6}{91}$$

2. $Y \in \{0, 1, 2\}$, $P(Y = 0) = \dfrac{45}{91},\ P(Y = 1) = \dfrac{40}{91},\ P(Y = 2) = \dfrac{6}{91}$

   $Z \in \{0, 1, 2\}$ $P(Z = 0) = \dfrac{15}{91},\ P(Z = 1) = \dfrac{48}{91},\ P(Z = 2) = \dfrac{4}{13}$

3. $X = 2Y - Z$: $E[X] = 2E[Y] - E[Z] = 0$

Esercizio 2. *Si supponga che in media su 100 nati 52 siano maschi. Una famiglia ha 5 figli. Posto X il numero di femmine e Y il numero di maschi individuarne la distribuzione e il valore atteso.*

Calcolare inoltre la probabilità che vi siano

1. *3 femmine e 2 maschi;*
2. *al più 3 femmine;*
3. *almeno 2 e non più di 4 femmine.*

Risposta 2. $X \sim Bin\left(5, \dfrac{12}{25}\right)$, $Y \sim Bin\left(5, \dfrac{13}{25}\right)$

$$E[X] = \frac{12}{5},\ E[Y] = \frac{13}{5}$$

1. $P(X = 3) = P(Y = 2) = 10\left(\dfrac{12}{25}\right)^3\left(\dfrac{13}{25}\right)^2$

2. $P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i} \left(\frac{12}{25}\right)^i \left(\frac{13}{25}\right)^{5-i}$

3. $P(2 \leq X \leq 4) = \sum_{i=2}^{4} \binom{5}{i} \left(\frac{12}{25}\right)^i \left(\frac{13}{25}\right)^{5-i}$

Esercizio 3. *Una fornitura di 100 componenti elettroniche ne contiene 6 difettose. Sia X il numero delle componenti difettose in un campione casuale di 10 componenti scelte dalla fornitura.*

1. *Individuare la distribuzione della variabile aleatoria X e il suo valore atteso.*

2. *Calcolare $P\{X > 2\}$.*

Risposta 3. 1. $X \sim HypGeom(100, 10, 6)$

$X \in \{0, \ldots, 6\}$

$$P(X = i) = \frac{\binom{6}{i}\binom{94}{10-i}}{\binom{100}{10}}$$

2. $P\{X > 2\} = \sum_{i=3}^{6} \frac{\binom{6}{i}\binom{94}{10-i}}{\binom{100}{10}}.$

Esercizio 4. *Vengono lanciati 2 dadi 6 volte. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero delle volte che si totalizza il punteggio 7 e sia Y la v.a. che conta il numero delle volte che si totalizza un punteggio almeno uguale a 7.*

1. *Individuare la distribuzione di X e di Y e i loro valori attesi.*

2. *Trovare la probabilità di totalizzare 7 almeno 3 volte.*

Risposta 4. 1. $X \sim Bin\left(6, \frac{1}{6}\right)$, $E[X] = 1$

2. $Y \sim Bin\left(6, \frac{7}{12}\right)$, $E[Y] = \frac{7}{2}$

Esercizio 5. *Sia X la differenza tra il numero di teste e il numero di croci ottenute in n lanci di una moneta. Quali valori può assumere?*
Per $n = 3$, calcolare la densità discreta di X, nel caso in cui

1. *la moneta è equilibrata;*
2. *la moneta non è equilibrata e p è la probabilità di ottenere testa.*

Risposta 5. $X = |2i - n|,\ i = 0, \ldots, n$

1. $P(X = 1) = \frac{3}{4},\ P(X = 3) = \frac{1}{4}$
2. $P(X = 1) = 3p(1 - p),\ P(X = 3) = 3p^2 - 3p + 1$

Esercizio 6. *Supponiamo che un motore di un aereo in volo possa andare in avaria con probabilità pari a $1 - p$, in maniera indipendente dagli altri motori. Se un aereo ha bisogno di almeno metà dei propri motori per poter concludere il volo senza problemi, per quali valori di p un aereo a 5 motori è più sicuro rispetto ad uno a 3 motori?*

Risposta 6. $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilit$\grave{a}$, 4-5 Maggio 2010

Esercizio 1. *Se* $\mathbb{E}[X] = 1$ *e* $Var(X) = 5$*, si calcolino*

1. $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$,
2. $Var(4 + 3X)$.

Risposta 1.

1. 14
2. 45

Esercizio 2. *Si lanciano 3 dadi. Un giocatore può scommettere su una delle 6 facce, pagando 1 euro. Se esattamente k dadi presentano la faccia scelta, il giocatore vince k euro.*
Nel caso in cui il giocatore punti sul 2, calcolare il valore atteso delle variabili aleatorie

a) $V =$ *vincita del giocatore,*

b) $X =$ *guadagno del giocatore*
(dove il guadagno è la differenza tra la vincita e quanto si è pagato per partecipare alla scommessa).

Un gioco si dice equo se il valore atteso del guadagno è zero.

c) Questo gioco è equo? Si suggerisca un pagamento che lo renda tale.

Risposta 2.

a) $E[V] = \frac{1}{2}$

b) $E[X] = -\frac{1}{2}$

c) Il gioco non è equo. Può essere reso equo apportando la seguente modifica: "un giocatore può scommettere su una delle 6 facce, pagando 1 euro. Se esattamente k dadi presentano la faccia scelta, il giocatore vince $k + \frac{1}{2}$ *euro.*

Esercizio 3. *Su una certa regione si abbattono in media 5,2 uragani all'anno. Calcolare la probabilità che quest'anno ce ne siano esattamente 3.*

Risposta 3. $P(X = 3) = e^{-5,2}\dfrac{(5,2)^3}{6}$

Esercizio 4. *Un dattilografo commette in media 2 errori per pagina. Calcolare la probabilità che nella prossima pagina ne contenga almeno 5.*

Risposta 4. $P(X \geq 5) = 1 - \dfrac{109}{15e^2}$

Esercizio 5. *Tre impiegati statali vanno a prendere un caffè e scelgono a caso chi paga con la seguente procedura: ognuno lancia una moneta, paga chi ottiene una faccia diversa dalle altre. Se tutte e tre le monete danno la stessa faccia, vengono lanciate di nuovo. Sia X il numero aleatorio dei lanci che occorrono per decidere chi paga.*

1. *Individuare il tipo di distribuzione di X, il parametro della sua distribuzione e il suo valore atteso.*

   Calcolare

2. *la probabilità che le monete debbano essere lanciate esattamente 3 volte;*
3. *la probabilità che occorrano più di 4 lanci.*

Risposta 5.

1. $X \sim Geom(\frac{3}{4}),\ E[X] = \frac{4}{3}$
2. $P(X = 3) = \frac{3}{4^3}$
3. $P(X > 4) = \frac{1}{4^4}$

Esercizio 6. *Una moneta equilibrata viene lanciata fino a quando appare per la decima volta testa. Sia X il numero di lanci che danno croce. Se ne calcoli la densità discreta.*

Risposta 6. $P(X = k) = \dfrac{(k+9)!}{9!k!}\dfrac{1}{2^{k+10}}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 11-12 Maggio 2010

Esercizio 1. *Individuare*

1. *una distribuzione di probabilità (non degenere) per una variabile aleatoria X in modo tale che risulti degenere la distribuzione della variabile aleatoria $Y = X^2$;*

2. *una distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria X (non binaria) in modo tale che $Y = X^2$ risulti una variabile aleatoria binaria.*

Esercizio 2. *Sia X una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità binomiale $Bin\left(6, \frac{1}{3}\right)$. Trovare il valore più probabile per X.*

Esercizio 3. *Definiamo $X \propto Hyp(N, m, n)$ se*

$$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - m \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$$

Si consideri una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità ipergeometrica $X \propto Hyp(6, 3, 3)$.
Qual è il più probabile fra i due eventi $\{X \leq 1\}, \{X > 1\}$?

Esercizio 4. *In una lotteria sono stati emessi 1000 biglietti e vengono distribuiti 2 primi premi del valore di 1000 Euro, 4 secondi premi del valore di 500 Euro e 20 terzi premi del valore di 100 Euro.*

a) *Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X che indica il valore della vincita associata ad un singolo biglietto.*

b) *Scrivere la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $2X$.*

Un tizio ha acquistato 2 biglietti della lotteria ed indichiamo con Z la variabile aleatoria che indica il valore complessivo della sua vincita alla lotteria.

c) *Trovare la distribuzione di probabilità di Z.*

Esercizio 5. *Si lanciano 2 dadi. Siano X e Y rispettivamente il massimo e il minimo punteggio ottenuto. Le due variabili sono indipendenti? Sono scorrelate?*

Esercizio 6. *Voi avete 1000 euro e una merce che vi interessa è attualmente venduta a 2 euro l'etto. Tra una settimana la merce verrà venduta (cioè varrà) 1 euro oppure 4 euro l'etto e le due alternative sono equiprobabili. Che strategia utilizzereste (comprare adesso / comprare tra una settimana) se il vostro obiettivo è*

1. *massimizzare il capitale atteso posseduto alla fine della prossima settimana;*
2. *massimizzare la quantità di merce attesa posseduta alla fine della prossima settimana.*

Esercizio 7. *Due giocatori A e B hanno rispettivamente probabilità* p *e* $q = 1 - p$ *di fare punto in una partita. Essi fanno un gioco in cui vince chi per primo totalizza* $2n + 1$ *punti. Il gioco consisterà di un numero di partite che va da un minimo di* $2n + 1$ *a un massimo di* $4n + 1$*. Calcolare la probabilità che il gioco si concluda alla* $(4n + 1 - k)$*-esima partita con la vittoria di A.*

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilità, 18-19 Maggio 2010

Esercizio 1. *Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete con distribuzione congiunta data da:*

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=2)=\frac{1}{10},$$

$$P(X=0,Y=3)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5},$$

$$P(X=1,Y=2)=0,\ P(X=1,Y=3)=\frac{2}{5}.$$

1. *Trovare le distribuzioni marginali di X e Y.*
2. *Calcolare* $\mathbb{E}[X],\ \mathbb{E}[Y],\ Var(X),\ Var(Y),\ Cov(X,Y)$.
   Le due variabili sono indipendenti?
3. *Sia* $Z=X+Y$*; calcolare la densità discreta di Z,* $\mathbb{E}[Z]$ *e Var(Z).*

Esercizio 2. *Sia X una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda=5$.

a) *Determinare k in modo tale che*

$$P\left(|X-5|<k\right)\geq\frac{95}{100}.$$

b) *Dare una maggiorazione di*

$$P\left(|3X-15|\geq 25\right).$$

Esercizio 3. *Si effettuano 10 lanci indipendenti di un dado equo. Tre giocatori scommettono sul risultato: A vince se esce 1, 2 o 3, B se esce 4 o 5, C se esce 6. Siano inoltre* X_A, X_B, X_C *il numero si vittorie di A, B e C rispettivamente.*

1. *Trovare la distribuzione congiunta di* X_A, X_B, X_C.
2. *Trovare la distribuzione marginale di* X_A *e calcolarne valore atteso e varianza.*
3. *Si supponga ora che il dado venga lanciato n volte. Determinare un n in modo tale che valga*

$$P\left(\left|\frac{X_A}{n}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{10}\right)\geq\frac{99}{100}.$$

Esercizio 4. *Una compagnia di assicurazioni possiede un capitale di un milione di euro. Essa tratta un solo tipo di polizza. All'inizio di ogni anno, ogni cliente paga un premio di 100 euro. Quando un cliente presenta una richiesta di risarcimento, la compagnia paga un milione di euro. Supponiamo che le richieste siano indipendenti.*

Nel suo primo anno di attività, la compagnia ha 20000 clienti e le richieste di indennizzo avvengono con una frequenza di 0,00005. Calcolare la probabilità che la compagnia fallisca entro il primo anno (fallisce quando va in passivo).
E se avesse il doppio dei clienti?

Supponiamo ora che la compagnia abbia la possibilità di ricorrere ad un prestito nel caso durante il primo anno andasse in passivo.
Calcolare (nel caso i clienti nel primo anno siano 20000) la probabilità che la compagnia abbia chiesto un prestito durante il primo anno, sapendo che, tra primo e secondo anno ha ricevuto 5 richieste di indennizzo e che, nel secondo anno, il numero dei clienti è raddoppiato.

Esercizio 5. *Siano* X_1, X_2, X_3, X_4 *i punteggi ottenuti dai lanci di 4 dadi. Definiamo le v.a.*

$$U = \min(X_1, X_2),\ V_1 = \max(X_1, X_2),\ V_2 = \max(X_1, X_3),\ V_3 = \max(X_3, X_4).$$

Calcolare il coefficiente di correlazione delle seguenti coppie [1]*:*

$$(U, V_1),\ (U, V_2),\ (U, V_3),\ (V_1, V_2),\ (V_1, V_3),\ (V_2, V_3).$$

[1] Per il caso di (U, V_1), si veda Es. 5, Tutoraggio 11-12 Maggio

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilit*à*, 25-26 Maggio 2010

Esercizio 1. *La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X è data da*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Calcolare

1. $P(X = i), \ i = 1, 2, 3;$
2. $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right).$

Risposta 1.

1. $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}, \ P(X = 2) = \dfrac{1}{6}, \ P(X = 3) = \dfrac{1}{12}$
2. $P\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

Esercizio 2. *Il tempo (in ore) richiesto per riparare un macchinario è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcolare la probabilità che la riparazione duri*

1. *più di 2 ore;*
2. *più di 10 ore, sapendo che la sua durata supera le 9 ore.*

Risposta 2.

1. $P(X > 2) = \dfrac{1}{e}$
2. $P(X > 1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Esercizio 3. *Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di distribuzione F_X e densità f_X. Determinare funzione di distribuzione e densità della variabile aleatoria $Y = aX + b$.*

Risposta 3. $F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Esercizio 4. *La densità di X è data da*

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Sapendo che $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{5}$, determinare a e b.

Risposta 4. $a = \dfrac{3}{5},\ b = \dfrac{6}{5}$

Esercizio 5. *Sia Y una variabile aleatoria uniformemente distribuita su $(0, 5)$. Calcolare la probabilità che le radici dell'equazione*

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

siano reali.

Risposta 5. $\dfrac{3}{5}$

Esercizio 6. *Un dado non truccato viene lanciato ripetutamente. Siano X e Y il numero di lanci necessari fino ad ottenere rispettivamente un 6 e un 5. Calcolare*

(a) $\mathbf{E}[X]$*;*

(b) $\mathbf{E}[X|Y = 1]$*;*

(c) $\mathbf{E}[X|Y = 5]$.

Risposta 6. *(a)* $\mathbf{E}[X] = 6$

(b) $\mathbf{E}[X|Y = 1] = 7$

(c) $\mathbf{E}[X|Y = 5] = 5,82$

Esercizio 7. *Al tiro al bersaglio si ricevono 10 punti se si colpisce entro 1 cm dal centro, 5 punti tra 1 e 3 cm dal centro, 3 punti tra 3 e 5 cm. Determinare il punteggio atteso (con un solo tiro) se la distanza dal centro è uniformemente distribuita tra 0 e 10 cm.*

Risposta 7. *2,6*

Esercizio 8. *Siano R_D e R_U i redditi annui, in migliaia di euro, rispettivamente di una donna e di un uomo. Essi seguono la seguente distribuzione:*

$$P(20 \leq R_D < 25) = 0,194,\ P(25 \leq R_D < 50) = 0,292,\ P(R_D \geq 50) = 0,048;$$

$$P(20 \leq R_U < 25) = 0,158,\ P(25 \leq R_U < 50) = 0,415,\ P(R_U \geq 50) = 0,172.$$

Si supponga di disporre di un campione casuale di 200 uomini e 200 donne. Approssimare la probabilità che

(a) *almeno 70 donne guadagnino almeno 25000 euro;*

(b) *al più il 60% degli uomini guadagni almeno 25000 euro;*

(c) *almeno i* $\frac{3}{4}$ *degli uomini e almeno la metà delle donne guadagnino almeno 20000 euro.*

Risposta 8. (a) *0,411*

(b) *0,672*

(c) $0,468 \cdot 0,85$

Tutoraggio di Calcolo delle Probabilit$\grave{a}$, 1 Giugno 2010

Esercizio 1. *Sia X una variabile aleatoria con densità*

$$f(x) = cx^4 \mathbf{1}_{(0,2)}(x).$$

Determinare il valore della costante c, $\mathbb{E}[X]$ e Var(X).

Risposta 1. $c = \frac{5}{32}$, $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{3}$, $Var(X) = \frac{5}{63}$

Esercizio 2. *Un adulto contrae in media 5 raffreddori l'anno. L'assunzione di un nuovo farmaco riduce, nel 75% dei casi, questa media a 3 raffreddori l'anno. Nel restante 25% dei casi, il farmaco è inefficace.*

a) Calcolare la probabilità che una persona che assume il farmaco prenda esattamente 2 raffreddori nell'arco di un anno, rispettivamente nelle due ipotesi che il farmaco abbia avuto effetto su di lei o meno.

b) Supponiamo che una persona assuma il farmaco e nell'arco di un anno abbia 2 raffreddori. Con quale probabilità il farmaco è stato efficace?

Risposta 2. *a)* $P(F) = 0,75$

$$P(X = 2|F) = \frac{9}{2e^3}, \; P(X = 2|\overline{F}) = \frac{25}{2e^5}$$

b) $P(F|X = 2) = \dfrac{27}{27 + 25e^{-2}}$

Esercizio 3. *Marilena e Nicola vanno a pesca ogni domenica. Marilena cattura un pesce con probabilità $\frac{1}{3}$ e Nicola con probabilità $\frac{1}{5}$. Calcolare*

a) il valore atteso del numero T di domeniche necessarie affinché almeno uno dei due prenda un pesce;

b) la probabilità che, nella prima domenica fortunata (la k-esima domenica),

- *solo Marilena prenda un pesce,*
- *solo Nicola,*
- *entrambi.*

Risposta 3. *a)* $\mathbb{E}[T] = \dfrac{15}{7}$

b) $X \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \sim Geom\left(\frac{1}{5}\right)$, $T = \min(X, Y)$

- $P(T = k = X, Y > k) = \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}$

- $P(T=k=Y, X>k) = \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$
- $P(T=X=Y=k) = \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

Esercizio 4. *Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 4, senza reinserimento. Sia X il numero degli assi e Y il numero dei re che si trovano fra le carte estratte. Calcolare*

a) $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$;

b) $\mathbb{E}[X|Y=k]$ *al variare di* k.

Risposta 4. *a)* $P(X=i) = \dfrac{\binom{4}{i}\binom{36}{4-i}}{\binom{40}{4}}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{5},\ Var(X) = \frac{9}{25} \cdot \frac{12}{13}$$

b) $k=4,\ P(X=i|Y=k)=0$

$$P(X=i|Y=k) = \frac{\binom{4}{i}\binom{32}{4-i-k}}{\binom{36}{4-k}},\quad k=0,\cdots,3,\ 0 \le i \le 4-k$$

$k=0,\cdots,4,\ \mathbb{E}[X|Y=k] = \dfrac{4-k}{9}$

Esercizio 5. *Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, secondo la seguente distribuzione di probabilità:*

$P(X_j=0) = 0,45-p,\ P(X_j=0,5) = 0,3,\ P(X_j=1) = 0,25,\ P(X_j=2) = p,$

dove $p \in (0,\ 0,45)$ è un parametro.

a) Trovare il valore di p per cui risulta $\mathbb{E}[X_j]=1$.

b) In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare $Var(X)$.

c) Sempre in corrispondenza allo stesso valore di p, trovare una minorazione per

$$P\left(|\ Y-1\ | \le \sqrt{\frac{21}{1000}}\right),$$

dove

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}.$$

Risposta 5. *a)* $p = 0,3$

b) $Var(X) = \dfrac{21}{40}$

c) $\dfrac{3}{4}$

Esercizio 6. *Per l'esperienza maturata, un professore sa che il punteggio in centesimi del test di uno studente che sostiene l'esame finale del suo corso si distribuisce come una variabile aleatoria X di media 75 e varianza 25.*

1. *Si dia un limite superiore alla probabilità che il punteggio del test dello studente sia superiore a 85.*
2. *Cosa possiamo dire invece circa la probabilità che il risultato sia compreso tra 65 e 85?*
3. *Trovare un numero n di studenti che sostengano il test sufficientemente grande, affinché, con probabilità non inferiore a 0.9, la votazione media della classe sia compresa tra 70 e 80.*

Risposta 6. *1.* $P(X > 85) \leq \dfrac{1}{4}$

2. $P(|X - 75| < 85) \geq \dfrac{3}{4}$

3. $n \geq 10$

Esercizio 7. *Sia S_{100} il numero di elettori dello schieramento A in un campione casuale (senza reinserimento) di 100 elettori estratti da una popolazione di 1000 elettori di cui m votano per A e $1000 - m$ votano per B.*

Dare una maggiorazione per la probabilità

$$P\left(\left|\frac{S_{100}}{100} - \frac{m}{1000}\right| > k\right)$$

e confrontarla con la maggiorazione che si otterrebbe supponendo le estrazioni dei 100 elettori indipendenti.

Risposta 7.

$$S_{100} \sim \ HyperGeom(1000, 100, m), \quad \mathbb{E}\left[\frac{S_{100}}{100}\right] = \frac{m}{1000}$$

$$Var\left(\frac{S_{100}}{100}\right) = \frac{m(1000-m)}{111000000}$$

$$P\left(\left|\frac{S_{100}}{100} - \frac{m}{1000}\right| > k\right) \leq \frac{m(1000-m)}{111000000 \cdot k^2}$$

Supponendo le estrazioni dei 100 elettori indipendenti:

$$P\left(\left|\frac{S_{100}}{100} - \frac{m}{1000}\right| > k\right) \leq \frac{m(1000-m)}{100000000 \cdot k^2}$$