LEZIONI CALCOLO DELLE PROBABILITA' (INFORMATICA) a.a. 2012-13

1)mercoledì 27 febbraio 2013

prima introduzione e prime definizioni

- perché si usa un insieme Ω (Omega) e corrispondenza tra insiemi ed eventi.

Esempi: lancio di una moneta, (di un dado), tiro a segno, estrazione di una carta da un mazzo di carte italiane

(mazzo di carte italiane: 4 semi, cioè Denari, Coppe, Bastoni, Spade; ogni seme ha 10 carte numerate da 1 a 10,

con 1= asso, 8= fante, 9 =cavallo, 10=re)

Ad ogni evento corrisponde un sottoinsieme E di Ω (Omega) .

L'insieme Ω (Omega) è in corrispondenza con l'evento certo, ed e' anche detto **evento certo**.

L'insieme vuoto $\emptyset$ è in corrispondenza con l'evento impossibile, ed e' anche detto **evento impossibile**.

LA PROBABILITA' NON ESISTE (de Finetti):

nel senso che la non esiste senza che ci sia qualcuno che la VALUTA

e DIPENDE dallo stato di informazione di chi la valuta.

Esempio dell'estrazione di una carta da un mazzo di carte: se riteniamo che il mazzo sia ben mescolato, e non ci siano trucchi,

allora valutiamo entrambi la probabilità che "venga estratto l'asso di bastoni" come 1/40,

ma se, ad esempio, io guardo la carta, ma voi no, e vi dico è una carta di bastoni, voi valutate 1/10 la probabilità di questo evento

mentre per me tale probabilità può valere o 0 o 1 (dipende dal valore della carta estratta)

Operazioni tra eventi e tra insiemi

AND corrisponde a "e", "si verificano contemporaneamente entrambi gli eventi" e dal punto di vista insiemistico corrisponde all'INTERSEZIONE

OR corrisponde all'"oppure" , " almeno uno dei due eventi si verifica" e dal punto di vista insiemistico corrisponde all'UNIONE

NOT corrisponde a "l'evento non si verifica" e dal punto di vista insiemistico corrisponde al COMPLEMENTARE

Ossia se E ed F sono due sottoinsiemi che rappresentano due eventi allora

all'evento "si verificano contemporaneamente entrambi gli eventi rappresentati da E e da F" corrisponde $E \cap F$ (E intersezione F)

all'evento "si verifica almeno uno tra gli eventi rappresentati da E e da F" corrisponde E U F (E unione F)

all'evento "non si verifica l'evento rappresentato da E" corrisponde l'evento E^c=E^c (complementare di E)

Alcune proprietà delle probabilità, per analogia con il caso in cui si contano i casi favorevoli diviso i casi possibili

P(Ω)=1, P(E^c)=1-P(E), se E ed F sono eventi incompatibili (sarebbe più giusto dire che E ed F rappresentano eventi incompatibili)

cioè non si possono verificare contemporaneamente (è impossibile che si verifichino entrambi)

ossia $E \cap F = \emptyset$, allora P(EUF)=P(E)+P(F)

Problema del compleanno (esperimento)

Date N persone in una stanza, quanto vale la probabilità che almeno due siano nate nello stesso giorno?

Per iniziare per evitare casi banali ho chiesto se ci fossero coppie di gemelli in aula, ma non c'erano,

e successivamente se ci fosse qualcuno nato il 29 febbraio, ma nessuno era nato quel giorno, questo per semplificare il modello.

Ho stabilito un ordine agli studenti in aula e abbiamo fatto l'esperimento:

rapidamente abbiamo scoperto che c'erano almeno due nati lo stesso giorno.

2) venerdì 1 marzo

Partendo dal problema del compleanno:

Dato un insieme I di cardinalità n, cioè con n elementi (senza ledere in generalità si può pensare I ={1,2,...,n-1,n}

una Disposizione con ripetizione di n elementi di classe k è una k-pla ordinata (i_1, i_2,..., i_k) con i_1, i_2, ... i_k appartenenti all'insieme I

una Combinazione [senza ripetizione] di n elementi di classe k è un modo di scegliere k elementi **tutti distinti** dall'insieme I, senza tenere conto dell'ordine

(ATTENZIONE k deve essere minore o uguale a n) corrisponde a un sottoinsieme di I di cardinalità k e viene indicata con {i_1,i_2,...,i_k}

una Disposizione [senza ripetizione] di n elementi di classe k è una k-pla ordinata (i_1, i_2,..., i_k) con i_1, i_2, ... i_k **tutti distinti** e appartenenti all'insieme I

(ATTENZIONE k deve essere minore o uguale a n)

una Permutazione di k elementi (= una Disposizioniedi k elementi di classe k)

C^n_k * P_k=D^n_k ossia

il numero delle disposizioni di n elementi di classe k (indicato con D^n_k) è uguale

al numero delle combinazioni di n elementi di classe k [senza ripetizione] (indicato con C^n_k)

moltiplicato per il numero delle permutazioni di k elementi (ossia il numero delle disposizioni, con n=k, indicato con P_k=D^k_k)

D'altra parte è facile convincersi che D^n_k=nD^{n-1}_{k-1}=n (n-1)...(n-(k-1))=n!/(n-k)! e che P_k=D^k_k=k!

da cui si dimostra che C^n_k=n!/[(n-k)!k!]

Interpretazione di C^n_k=C^n_{n-k}

(la corrispondenza biunivoca che ai sottoinsiemi di A associa A^c= A^c fa capire che il numero di sottoinsiemi di cardinalità k è uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità n-k)

Dimostrazione di C^n_k=C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}:

Possiamo dividere le combinazioni di n elementi di classe k (che sono sottoinsiemi di I di cardinalità k) in due famiglie: i sottoinsiemi che NON contengono n e quindi sono sottoinsiemi di {1,2,...,n-1} di cardinalità k (e sono quindi C^{n-1}_k) e i sottoinsiemi A che contengono n e quindi si possono scrivere come

A=A' U {n}, dove A' e' un sottoinsieme di {1,2,...,n-1} di cardinalità k-1, e quindi sono in tutto C^{n-1}_{k-1}

Basta infine osservare che ogni combinazione di n elementi di classe k appartiene a una e una sola di queste due famiglie per ottenere la formula da dimostrare

Uso della formula (C^n_k=C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}, insieme a C^n_0=C^n_n=1) per la costruzione del triangolo di Tartaglia e calcolo dei coefficienti binomiali

Alcuni esempi di applicazione (estrazione di carte) lancio di due dadi

3) lunedì 4 marzo 2013

Funzioni indicatrici di eventi, cardinalità dell'insieme delle parti, e dimostrazione di 2^n = C^n_0 + C^n_1 +...+ C^n_k+...+ C^n_n

1) L'insieme $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ delle parti di un insieme $\mathbf{I}$ di cardinalità n ha cardinalità 2^n

(per dimostrarlo basta mettere in corrispondenza biunivoca ogni sottoinsieme $\mathbf{J}$ contenuto in $\mathbf{I}$ con la sua funzione indicatrice

e quest'ultima con la n-pla ordinata di 0(zeri) e di 1:

la funzione 1_ $\mathbf{J}$ è definita come segue:

1_ $\mathbf{J}$ (x)=0 se x non appartiene a $\mathbf{J}$ mentre 1_ $\mathbf{J}$ (x)=1 se x appartiene a $\mathbf{J}$,

in altre parole, se ad esempio $\mathbf{I}$ ={a,b,c,d,e} e $\mathbf{J}$ ={a,,c,d} allora 1_ $\mathbf{J}$ (a)=1, 1_ $\mathbf{J}$ (b)=0, 1_ $\mathbf{J}$ (c)=1, 1_ $\mathbf{J}$ (d)=1, 1_ $\mathbf{J}$ (e)=0

che è in corrispondenza biunivoca con la 5-pla ordinata (1,0,1,1,0)

Viceversa data una 5-pla ordinata di 0 e 1, ad esempio a (0,0,1,1,0) è associato l'insieme {c,d}

Quindi l'insieme delle parti è in corrispondenza biunivoca con le disposizioni con ripetizione di due elementi (ossia 0 e 1) di classe n,

e perciò ha cardinalità 2^n.

2) L'insieme delle parti è si può dividere in classi) $\mathcal{C}$_0 , $\mathcal{C}$_1 ,... $\mathcal{C}$_k ,...$\mathcal{C}$_n di sottoinsiemi, ciascuna classe composta di sottoinsiemi tutti con la stessa cardinalità:

$\mathcal{C}$_0 quella composta dall'insieme vuoto, che è l'unico sottoinsieme con 0 elementi

$\mathcal{C}$_1 quella composta dai singoletti (singleton) ossia insiemi di un solo elemento (che sono n=C^n_1)

...

$\mathcal{C}$_k quella composta di sottoinsiemi di cardinalità k (che sono C^n_k)

...

$\mathcal{C}$_n quella composta dall'insieme stesso, cioè di cardinalità n (ed è composta da un solo insieme, l'insieme stesso(C^n_n=1)

Mettendo insieme i punti 1) e 2) si ottiene la tesi in quanto

2^n=|$\mathcal{P}(\mathbf{I})$|=| $\mathcal{C}$_0 |+| $\mathcal{C}$_1 |+...+| $\mathcal{C}$_k |+...+| $\mathcal{C}$_n |= C^n_0 + C^n_1 +...+ C^n_k+...+ C^n_n

Tale formula corrisponde al caso x=y=1 nella formula del binomio di Newton

(x+y)^n=C^{n}_0 x^0 y^n + C^n_1x^k1y^{n-1}+...+ C^n_kx^k y^{n-k} +...+ C^n_nx^n y^0 = =$\sum$_{k=0,1,..,n} C^n_k x^k y^{n-k}

Idea della dimostrazione senza induzione della stessa formula, nel caso n=4

cominciamo con lo svolgere il prodotto

(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)(x_4+y_4)

è la somma di tutti i prodotti con 4 fattori in cui compaiono

come primo fattore o x_1 o y_1, come secondo fattore o x_2 o y_2, come terzo fattore o x_3 o y_3 e infine come quarto fattore o x_4 o y_4, ossia

$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3)(x_4+y_4)=$

$= y_1 y_2 y_3 y_4$ (corrisponde alla scelta di $\emptyset$ in C^4_0 modi)

$+ x_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 x_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 x_4$

(corrisponde alla scelta di{1}, {2}, {3} {4} , in C^4_1 modi)

$+ x_1 x_2 y_3 y_4 + x_1 y_2 x_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 y_4$ 4 $+ y_1 x_2 y_3 x_4$ 4 $+ y_1 y_2 x_3 x_4$

(corrisponde alla scelta di{1,2},{1,3}, {1,4} {2,3}, {2,3} {3,4} , in C^4_2 modi)

$+ x_1 x_2 x_3 y_4 + x_1 x_2 y_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 x_4$

(corrisponde alla scelta di{1,2,3},{1,2,4}, {1,3,4} {2,3,4} , in C^4_3 modi)

$+ x_1 x_2 x_3 x_4$ (corrisponde alla scelta di{1,2,3,4}, in C^4_2 modi)

Quando gli x_i sono tutti uguali a x e gli y_i sono tutti uguali a y si ottiene

$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

$y_1 y_2 y_3 y_4 = y^4 = C^4_0 x^0y^4$ (corrisponde alla scelta di $\emptyset$ in C^4_0 modi)

$x_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 x_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 x_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 x_4 = C^4_1 x^1 y^3$

(corrisponde alla scelta di{1}, {2}, {3} {4} , in C^4_1 modi)

$x_1 x_2 y_3 y_4 + x_1 y_2 x_3 y_4 + x_1 y_2 y_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 y_4$ 4 $+ y_1 x_2 y_3 x_4$ 4 $+ y_1 y_2 x_3 x_4 = C^4_2 x^2 y^2$

(corrisponde alla scelta di{1,2},{1,3}, {1,4} {2,3}, {2,3} {3,4} , in C^4_2 modi)

$x_1 x_2 x_3 y_4 + x_1 x_2 y_3 x_4 + x_1 y_2 x_3 x_4 + y_1 x_2 x_3 x_4 = C^4_3 x^3 y^1$

(corrisponde alla scelta di{1,2,3},{1,2,4}, {1,3,4} {2,3,4} , in C^4_3 modi)

$x_1 x_2 x_3 x_4 = x^4= C^4_4 x^4 y^0$ (corrisponde alla scelta di{1,2,3,4}, in C^4_2 modi)

e quindi

$(X+y)^4= C^4_0 x^0y^4 + C^4_1 x^1 y^3 + C^4_2 x^2 y^2 + C^4_3 x^3 y^1 + C^4_4 x^4 y^0$

ESERCIZIO PROPOSTO

usare la proprietà $C^n_k=C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}$ (formula di Stieffel)

per la dimostrazione per induzione della formula del binomio di Newton $(x+y)^n=\sum_{k=0,1,..,n} C^n_k x^k y^{n-k}$

ESEMPIO mazzo di carte napoletane, poniamo la seguente corrispondenza

1= Asso di denari, 2= due di denari,.... 10= dieci/re di denari, 11= Asso di coppe, 12= due di coppe,...20=10/re di coppe

21= Asso di bastoni, 22= due di bastoni,.... 30= dieci/re di bastoni, 31= Asso di spade, 32= due di spade,...40=10/re di spade

Mischiamo bene il mazzo:gli esiti possibili sono tutte e sole le permutazioni degli elementi {1,2,...40}

ossia Ω ={ (i_1, i_2, ...,i_40) con i_k $\in$ {1,2,...40}, tutti distinti }

ESERCIZIO descrivere gli insiemi A_1 ed A_2 che corrispondono agli eventi

"la prima carta è un asso" e "la secondo carta è un asso" rispettivamente, e determinarne la cardinalità

SOLUZIONE

A_1={ (i_1, i_2, ...,i_40) $\in$ Ω , e tali che i_1$\in$ {1,11,21,31} }

| A_1 | = 4 x 39!

infatti, posti A_{1,d} , A_{1,c}, A_{1,b} , A_{1,s} gli eventi

"la prima carta è l'asso di denari", "la prima carta è l'asso di coppe", "la prima carta è l'asso di bastoni", "la prima carta è l'asso di spade"

si ha

A_1= A_{1,d} $\cup$ A_{1,c} $\cup$ A_{1,b} $\cup$ A_{1,s}

e | A_{1,d} |= | A_{1,c}|=| A_{1,b} |=| A_{1,s}|=39!

A_2={ (i_1, i_2, ...,i_40) $\in$ Ω , e tali che i_2$\in$ {1,11,21,31} }

| A_2 | = 4 x 39!

Questo si può vedere sia ripetendo il ragionamento e introducendo gli eventi A_{2,d} , A_{2,c}, A_{2,b} , A_{2,s}

oppure più semplicemente osservando che A_1 e A_2 sono in corrispondenza biunivoca:

basta scambiare i_1 e i_2 per ottenere da un elemento di A_1 un elemento di A_2 e viceversa.

ESERCIZIO (II parte)

i) Calcolare la probabilità che la prima carta sia un asso e la probabilità che la secondo carta sia un asso

(ATTENZIONE nel chiedere la probabilità che la seconda carta sia un asso, cioè

NON VIENE DETTO NULLA SULLA PRIMA CARTA, cioè non si sa se nulla sul valore della prima carta)

La risposta intuitiva è la probabilità che la prima carta sia un asso è 4/40 (4 sono gli assi e 40 le carte),

e la probabilità che la seconda carta sia un asso è uguale, cioè sempre 4/40

SOLUZIONE P(A_1)=P(A_2)=|A_1|/|Ω |= |A_2|/ | Ω| = 4 x 39!/ 40!= 4 x 39! /(40 x 39!)= 4/40=1/10

ii) Calcolare la probabilità che sia la prima che la seconda carta siano assi

SOLUZIONE

L'evento che ci interessa è $A_1 \cap A_2 = \{ (i_1, i_2, ..., i_{40}) \in \Omega$, e tali che $i_1, i_2 \in \{1,11,21,31\} \}$

Possiamo scrivere $A_1 \cap A_2$ come l'unione degli eventi

$A_{1,d,2,c}=\{ (i_1, i_2, ..., i_{40}) \in \Omega$, e tali che $i_1=1, i_2=11 \} =\{ (1, 11, i_3, i_4, ..., i_{40}) \in \Omega \}$

$A_{1,d,2,b}=\{ (i_1, i_2, ..., i_{40}) \in \Omega$, e tali che $i_1=1, i_2=21 \} =\{ (1,21, i_3, i_4, ..., i_{40}) \in \Omega \}$

etc.

Tali eventi hanno ciascuno cardinalità 38! e sono 4 x 3 (=12) e quindi

$P(A_1 \cap A_2)=| A_1 \cap A_2 |/| \Omega |= 4 \times 3 \times 38! / (40 \times 39 \times 38!)= 4 \times 3/(40 \times 39)= (4/40) \times (3/39)$

iii) SAPENDO che la prima carta è un asso, calcolare la probabilità che la seconda carta sia un asso

in altre parole

SAPENDO che si è verificato l'evento A_1, calcolare la probabilità che si verifichi l'evento A_2

in simboli si scrive **P(A_2 | A_1)** (a volte anche $P_{A_1}(A_2)$, ma meno spesso, per mettere in evidenza che e' una valutazione della probabilità, valutata sulla base dell'informazione che si è verificato A_1) e si legge **probabilità di A_2 dato A_1 oppure probabilità di A_2 condizionata ad A_1**

La risposta intuitiva è 3/39: tre casi favorevoli (i tre assi rimasti) diviso i 39 casi possibili(tutti meno la carta uscita)

Si osservi che viene lo stesso risultato facendo il rapporto

$P(A_1 \cap A_2)/ P(A_1))=(| A_1 \cap A_2 |/| \Omega |) / (| A_1 |/| \Omega |) =| A_1 \cap A_2 |/ A_1 |= 4 \times 3 \times 38! / (4 \times 39!) = 3/39$

Vedremo che questa sarà la definizione di probabilità condizionata

OSSERVAZIONE abbiamo usato l'espressione "che si verifichi l'evento A_2", questo è un fatto importante: che va sottolineato: un evento per essere tale deve corrispondere a una proprietà verificabile, ossia si deve essere in grado di decidere se si è verificato oppure no.

Il seguente esempio ci fa capire

- perché non è detto che tutti i sottoinsiemi di Ω (Omega) siano eventi:

ESEMPIO del dado coperto di bollini rossi sui pari e blu sui dispari:

"esce un numero pari" è un evento, mentre" esce il due " non è un evento perché non posso dire se si è verificato o no, oppure esce un numero minore o uguale a tre non è un evento.

Ancora sul significato delle operazioni logiche di OR, AND e NEGAZIONE e le operazioni di unione, intersezione e complementare, sugli insiemi

4) mercoledì 6 marzo 2013

Assiomi di uno spazio di probabilità e e prime conseguenze

- dato un insieme Ω e data $\mathcal{F}$ un'algebra, o una σ-algebra [si legge sigma-algebra], ossia una famiglia di sottoinsiemi di Ω , [$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$]

tale che

1. Ω appartiene a $\mathcal{F}$; *(l'evento certo è un evento)*

2. se A appartiene a $\mathcal{F}$, allora A^c appartiene a $\mathcal{F}$; *(se A è un evento, allora anche il suo complementare è un evento)*

3. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...,n, allora l'evento A= $\cup_{i=1,...n}$ A_i (si verifica almeno uno tra gli eventi A_1,...,A_n) appartiene a $\mathcal{F}$;

(se A_i sono eventi allora "si verifica almeno uno tra gli eventi A_1,...,A_n" è un evento)

3bis. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...,n,alloral'evento A= $\cap_{i=1,...n}$ A_i (si verificano tutti gli eventi A_1,...,A_n) appartiene a $\mathcal{F}$;

OSSERVAZIONE: la proprietà 3.bis è sovrabbondante, pleonastica, come segue dalla legge di De Morgan e dalla proprietà 2. , infatti:

per la legge di De Morgan $\cup_{i=1,...n}$ A_i ^c = $(\cap_{i=1,...n}$ A_i$)^{c}$

(ossia "si verifica almeno uno dei complementari di A_i", cioè almeno uno degli A_i non si verifica" equivale a "non si verificano tutti gli A_i")

ed A=$\left((\cap_{i=1,...n}\text{ A_i})^{c}\right)^{c}$ è un evento, essendo il complementare di un evento.

ATTENZIONE se al posto di 1,...,n si considera un'infinità numerabile di eventi , allora si parla di σ-algebra, ossi, quando si considera

3. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...,n,n+1,... ,allora l'evento A= $\cup_{i=1,...}$ A_i (si verifica almeno uno tra gli eventi A_1,...,A_n, A_{n+1},....) appartiene a $\mathcal{F}$;

3bis. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...n, n+1,...., allora l'evento A= $\cap_{i=1,...}$ A_i (si verificano tutti gli eventi A_1,...,A_n A_{n+1},....) appartiene a $\mathcal{F}$;

una funzione P da $\mathcal{F}$ in [0,1] è una probabilità (o una misura di probabilità) se e solo se

P: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow$ [0,1], A $\in \mathcal{F} \rightarrow$ P(A)

è tale che

(0. $0 \leq P(A) \leq 1$)

1. $P(\Omega) = 1$ (normalizzazione)

2. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...,n, incompatibili a due a due (cioè A_i$\cap$ A_j=$\emptyset$ per ogni i $\neq$ j), allora

P($\cup_{i=1,...n}$ A_i) = $\Sigma_{i=1,...n}$ P(A_i) (proprietà di additività finita della probabilità)

ATTENZIONE la proprietà 2, negli assiomi di Kolmogorov viene data come segue (nel caso in cui $\mathcal{F}$ è una σ-algebra)

2. se A_i appartiene a $\mathcal{F}$, per i=1,...,n, n+1, ..., incompatibili a due a due (cioè A_i$\cap$A_j=$\emptyset$ per ogni i $\neq$ j), allora

$P(\cup_{i=1,\dots} A_i) = \Sigma_{i=1,\dots} P(A_i)$ (proprietà di additività numerabile o σ--additività della probabilità)

IN UNO SPAZIO DI PROBABILITA' C'E' POI LA PROBABILITA' CONDIZIONATA

dato un evento B con P(B)>0 si definisce

$P_B : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, $A \in \mathcal{F} \longrightarrow P_B(A)=P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

NOTA BENE, IN REALTA' DOVREMO CONTROLLARE CHE E' UNA PROBABILITA', ossia che $0 \leq P(A|B) \leq 1$, che $P(\Omega|B)=P_B(\Omega)=1$ e che

$P_B(\cup_{i=1,\dots n} A_i) = \Sigma_{i=1,\dots n} P_B(A_i)$, se gli eventi A_i sono incompatibili a due a due, ossia $A_i \cap A_j=\emptyset$ per ogni $i \neq j$

Prime conseguenze degli assiomi delle probabilità

i) $P(\emptyset)=0$

Dim: Se E è un evento allora $P(E)=P(E \cup \emptyset)=P(E)+P(\emptyset)$ quindi $P(\emptyset)=0$

ii) Se A è un evento allora $P(A^c)=1-P(A)$

Dim: $A \cup A^c= \Omega$ quindi $P(A)+P(A^c)=P(\Omega)=1$ quindi $P(A^c)=1-P(A)$ e $P(A)=1-P(A^c)$

iii) Se A e B sono eventi allora $P(A)=P(A \cap B)+P(A \cap B^c)$ e, ovviamente, $P(B)=P(A \cap B)+P(A^c \cap B)$

Dim: basta osservare che $A=(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e scambiare il ruolo di A e di B

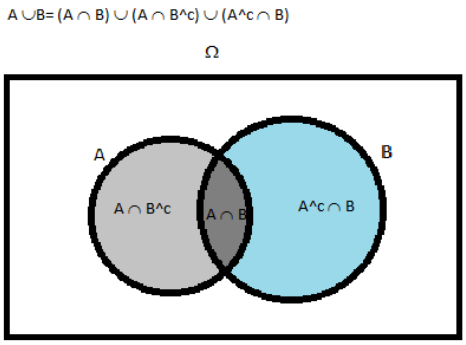
iv) Se A è incluso in B ($A \subseteq B$ ossia il verificarsi di A implica il verificarsi di B) allora $P(A) \leq P(B)$

(PROPRIETA' di MONOTONIA DELLA PROBABILITA')

Dim: se A è contenuto in B allora $A \cap B=A$ e quindi $P(B)=P(A \cap B) + P(A^c \cap B)= P(B)=P(A) + P(A^c \cap B) >= P(A)$

v) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ **(FORMULA DI INCLUSIONE ED ESCLUSIONE per la probabilità che si verifichi almeno uno di due eventi)**

Dim: $A \cup B= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ da cui $P(A \cup B)=P (A \cap B) +P (A \cap B^c) +P (A^c \cap B)$



D'altra parte, per il punto iii), si ha $P(A)+P(B)-P(A \cap B) = P(A \cap B)+P(A \cap B^c) + P(A \cap B)+P(A^c \cap B) - P(A \cap B)= P(A \cap B)+P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

vi) **bis** $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

(principio di inclusione ed esclusione per la probabilità che si verifichi almeno uno tra gli eventi A , B e C, ossia P(A U B U C) , con dimostrazione)

Dim: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ da cui

$P(A \cup B \cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B) \cap C))$

Ovviamente $(A\cup B) \cap C= (A\cap C) \cup (B\cap C)$, e $(A\cap C)\cap(B\cap C)=A \cap B \cap C$

da cui $P((A\cup B) \cap C)= P((A\cap C) \cup (B\cap C))= P(A\cap C) + P(B\cap C) - P((A\cap C)\cap(B\cap C))= P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$

e quindi

$P(A \cup B \cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B) \cap C))= P(A)+P(B)-P(A\cap B) +P(C) - [P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)]$

e la tesi segue immediatamente.

caso generale (SENZA DIMOSTRAZIONE)

Probabilità che si verifichi almeno uno tra gli eventi A_1, A_2, ..., A_N, ossia

$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_N)$

$= P(A_1)+P(A_2)+ ... +P(A_N) - [P(A_1 \cap A_2)+ P(A_1 \cap A_3)+...+ P(A_i \cap A_j)+.... P(A_{n-1} \cap A_n)]+....$

$....+(-1)^{k-1} \sum_{i_1,i_2,..,i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap...\cap A_{i_k}) +...+(-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap...\cap A_N)$

dove le somme $\sum_{i_1,i_2,..,i_k}$ sono fatte su tutti i C^N_k sottoinsiemi di {1,2,..., N} aventi cardinalità k

ATTENZIONE spesso però è più comodo calcolare

$P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_N)=1- P(A_1^c \cap A_2^c \cap...\cap A_N^c)$

5) venerdì 7 marzo 2013

Altre conseguenze degli assiomi:

Prima forma della formula delle probabilità totali

Costruzione di spazi di probabilità finiti

PRIMA FORMA DELLA FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI

Se H_1, H_2, ...H_m formano una partizione dell'evento certo

ossia sono disgiunti a due a due (ossia per ogni $i\neq j$ $H_i \cap H_j= \emptyset$,cioè H_i e H_j sono eventi incompatibili)

e $H_1\cup H_2\cup .... \cup H_m=\Omega$ (cioè gli eventi H_1, ... , H_m sono esaustivi)

allora $P(H_1)+P(H_2)+....+P(H_m)=1$ (immediata)

e

$P(A)=P(A \cap H_1)+P(A \cap H_2)+....+P(A \cap H_m)$

(basta osservare che $A=A\cap \Omega = A\cap (H_1\cup H_2\cup .... \cup H_m) =(A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_m)$, e che $(A \cap H_i)$ e $(A \cap H_j)$ sono incompatibili per ogni $i\neq j$

e infine usare la proprietà di additività)

Caratterizzazione degli spazi di probabilità in cui è un insieme finito e l'algebra degli eventi è tutto l'insieme delle parti

$\Omega = \{\omega_i, i=1,...N\}$

$p_i=P(\{\omega_i\})$ con le condizione che $p_i>=0$, e che $p_1+ p_2+....+ p_N = 1$

risulta necessariamente

$P(E)=\sum_{\{i=1,..,N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} P(\{\omega_i\})= \sum_{\{i=1,..,N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} p_i$

infatti $P(E)=P(E\cap H_1)+P(E\cap H_2)+....+P(E\cap H_N)$

dove $H_k=(\{\omega_k\}$

e quindi $P(E\cap H_k)=0$ se ω_k **non appartiene** ad E ($\omega_k \notin E$) in quanto $E\cap H_k= \emptyset$

mentre $P(E\cap H_k)=P(\{\omega_k\})$ se ω_k **appartiene** ad E ($\omega_k \in E$) in quanto $E\cap H_k=H_k=\{\omega_k\}$

Viceversa, presi $p_i>=0$, e che $p_1+ p_2+....+ p_N = 1$ e definita, su tutti i sottoinsiemi di Ω

$P(E)=\sum_{\{i=1,..,N \text{ t.c. } \omega_i \text{ appartiene a } E\}} p_i$

La funzione P è una probabilità (ossia 0 P(E) 1, $P(\Omega)=1$ e se A_i sono eventi incompatibili a due a due, allora la probabilità dell'unione è la somma delle rispettive probabilità) LASCIATO per esercizio

ES ERCIZIO 1: Dati tre eventi A, B e C

1a. E' possibile che

$P(A\cap B\cap C)=P(A \cap B \cap C^c)=0.1$, $P(A \cap B^c \cap C)=P(A^c \cap B \cap C)=0.15$ e

$P(A^c \cap B^c \cap C)=P(A \cap B^c \cap C^c)=P(A^c \cap B \cap C^c)=0.05$?

RISPOSTA: sì è possibile infatti la somma delle precedenti probabilità è minore o uguale a 1 e quindi

$P(A^c \cap B^c \cap C^c)=1-[P(A\cap B\cap C)+....+P(A^c \cap B \cap C^c)] \geq 0$ (e viene $P(A^c \cap B^c \cap C^c)=1-0.65=0.35$)

1b. Calcolare P(A), P(B) e P(C), 1c. Calcolare $P(A \cup B)$ e $P(A \cup C)$ 1d. Calcolare $P(A \cup B \cup C)$

SOLUZIONE:

1b.

$A=(A\cap B\cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)$ quindi

$P(A)=P(A\cap B\cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c)=0.1+0.1+0.15+0.05=0.40$, P(B) e P(C) si calcolano in modo analogo

1c.

ad esempio $A \cup B=(A\cap B\cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

o anche $A \cup B=A \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$ e quindi

$P(A \cup B)=P(A) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A^c \cap B \cap C^c)=0.40+0.15+0.05=060$

1d. Conviene in questo caso osservare che $P(A \cup B \cup C) = 1- P(A^c \cap B^c \cap C^c)=0.65$

6) lunedì 11 marzo 2013

Anagrammi di parole e introduzione ai coefficienti multinomiali

CALCOLARE il numero degli anagrammi (anche senza senso) DI MATEMATICA

In due modi consideriamo le lettere come tutte distinte M_1, M_2, A_1, A_2, A_3, T_1, T_2, E_1,I_1, C_1,

PRIMO MODO tutte le oro permutazioni sono 10!, ma permutando in 2! modi tra loro le 2 lettere M_i ottengo lo stesso anagramma, e lo stesso se permuto (in 3! modi) le 3 lettere A_i oppure le 2 lettere T_i quindi devo dividere per 3!2! 2!

Quindi sono 10!/(2! 3! 2!) anagrammi distinti, conviene scrivere però

10!/ (2! 3! 2!1!1!1!)

In quanto si può effettuare il seguente controllo: la somma di 2+3+2+1+1+1=10

SECONDO MODO (difficile a dirsi, facile a farsi)

Ci sono 10 posti a disposizione dove mettere le 2 M e questa scelta può essere fatta in C^10_2 modi, ad esempio:

. M . . M . . . . . in C^10_2=10!/(2! 8!) modi diversi

Per ciascuna scelta, nei rimanenti 8=10-2 posti posso mettere in C^8_3 modi le 3 lettere A, ad esempio

. M . A M . A . . A in C^10_2 C^8_3=[10!/(2! 8!)] [8!/(3! 5!)]= 10!(2!,3! 5!) modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei 5=8-3 posti liberi in C^5_2 modi diversi le 2 T, ad esempio

. M T A M . A T . A in C^10_2 C^8_3 C^5_2=[10!/(2! 8!)] [8!/(3! 5!)][5!/(2!3!)]= 10!(2!,3! 2!3!) modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei 3=5-2 posti liberi in C^3_1 modi diversi la E, ad esempio

. M T A M . A T E A in C^10_2 C^8_3 C^5_2C^3_1=[10!/(2! 8!)] [8!/(3! 5!)][5!/(2!3!)][3!/(1!2!)]= 10!(2!,3! 2!1!2!) modi diversi

Per ciascuna delle precedenti scelte posso mettere nei 2=3-1 posti liberi in C^2_1 modi diversi la I, ad esempio

I M T A M . A T E A in C^10_2 C^8_3 C^5_2C^3_1 C^2_1=[10!/(2! 8!)] [8!/(3! 5!)][5!/(2!3!)][3!/(1!2!)][2!/(1!1!)]= 10!(2!,3! 2!1!1!1!) modi diversi

E a questo punto la C può essere messa in un solo modo possibile C^1_1

I M T A M C A T E A in C^10_2 C^8_3 C^5_2C^3_1 C^2_1 C^1_1= 10!(2!,3! 2!1!1!1!) modi diversi

++++++++++

ATTENZIONE: se k_1, k_2,..., k_m sono numeri interi $\geq$ 0 e tali che se k_1+ k_2+...+ k_m=n

il numero n!/(k_1! k_2 !...k_m!) è detto coefficiente multinomiale

inoltre n!/(k_1! k_2 !...k_m!) = C^n_{k_1} C^{n-k_1}_{k_2} C^{n-k_1-k_2}_{k_3} .... C^{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}_{k_m}

+++++++++

Calcolare gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza ICE (cioè le tre lettere ICE consecutive) al suo interno:

SOLUZIONE: dobbiamo dividere gli anagrammi in 8 tipi:

tipo 1 I C E . . . . . .

dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi 7!/(2! 3! 2!)

tipo 2 . I C E . . . . . dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi 7!/(2! 3! 2!)

e così via fino al

tipo 8 . . . . . I C E dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MMAAATT e che sono quindi 7!/(2! 3! 2!)

in conclusione gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza ICE sono $8 \cdot 7!/(2!\,3!\,2!) = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2^4\, 3\, 5\, 7$

Calcolare gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza MAT (cioè le tre lettere MAT consecutive) al suo interno:

se procediamo come prima otteniamo

tipo 1 M A T . . . . . .

dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi 7!/(1!2! 1! 1!1!1!) =7!/2

tipo 2 . M A T. . . . . dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi 7!/(1!2! 1! 1!1!1!) =7!/2

e così via fino al

tipo 8 . . . . . M A T dove al posto dei 7 puntini ci vanno gli anagrammi di MAATICE e che sono quindi 7!/(1!2! 1! 1!1!1!) =7!/2

e poi sommiamo ottenendo $8 \cdot 7!/2 = 8!/2$ FACCIAMO UN ERRORE: infatti calcoliamo due volte gli anagrammi che hanno due volte la sequenza MAT al loro interno

e quindi, dopo aver sommato tutti questi numeri, dobbiamo sottrarre tutti gli anagrammi che contengono due volte la sequenza MAT

(sempre per il principio di inclusione- esclusione)

questi ultimi sono tanti quanti gli anagrammi di

XEXICA dove, per brevità, con X abbiamo indicato la sequenza MAT e sono quindi 6!/(2!1!1!1!1!)= 6!/2

(non si continua perché non è possibile avere tre sequenze MAT)

in conclusione gli anagrammi di MATEMATICA che contengono la sequenza MAT sono $8!/2 - 6!/2 = 6!\,(8 \cdot 7-1)/2 = 6! \cdot 55/2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3\, 3\, 5^2\, 11$

Esempio: (dal Ross) Si mischia bene un mazzo di carte francesi (52 carte con 4 semi:
cuori ♥, quadri ♦, fiori ♣, picche ♠) e si mostrano le carte una dopo l'altra, Calcolare la Probabilita' di

A= "subito dopo il primo asso esce il due di picche", B= "subito dopo il primo asso esce l'asso di picche"

E = "subito dopo il primo asso esce un altro asso", (non proposto a lezione F="subito dopo il primo asso NON esce un altro asso")

SOLUZIONE per P(A):

Usando la probabilità classica, numero dei casi favorevoli diviso il numero dei casi possibili:

CASI POSSIBILI: Ω= tutte le permutazioni di 52 elementi quindi $|\Omega|=52!$

CASI FAVOREVOLI: per costruire un caso favorevole possiamo mischiare le 51 carte del mazzo, avendo escluso il 2 d picche,e poi mettere il due di picche subito dopo il primo asso, QUINDI data una permutazione delle 51 carte otteniamo un caso favorevole, VICEVERSA, dato un qualunque caso favorevole, se togliamo il due di picche otteniamo una permutazione delle 51 carte rimaste, quindi i casi favorevoli sono tanti quante le permutazioni di 51 carte, ossia il numero dei casi favorevoli è uguale a 51!, ovvero $|A|=51!$

Di conseguenza $P(A)=|A|/|\Omega|=51!/52!=1/52$

SOLUZIONE PER P(B): P(B)=P(A) stesso ragionamento, sostituendo il due di picche con l'asso di picche.

SOLUZIONE PER P(E): = 4P(B) infatti $E=B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, dove B_1=B= "subito dopo il primo asso esce l'asso di picche"

B_2="subito dopo il primo asso esce l'asso di fiori" B_3= "subito dopo il primo asso esce l'asso di quadri" e B_4="subito dopo il primo asso esce l'asso di cuori"

e notare che $P(B_i)=P(B)$ e che B_i sono eventi incompatibili a due a due

SOLUZIONE PER P(F): P(F)=48 P(A) infatti $F= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{48}$ (dove A_i= " subito dopo il primo asso esce la carta i", avendo numerato le carte in modo che gli assi sono le ultime 4 carte e $P(A_i)=P(A)$

OSSERVAZIONE mentre P(A)=P(B) si ha invece P(E)<P(F)

FISSATO l'evento B, con P(B)>0, LA PROBABILITA' CONDIZIONATA a B E' UNA PROBABILITA'

Dimostrazione che, fissato B con P(B)>0, la probabilità condizionata a B è una probabilità, ossia, posto $P_B(A)=P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

$P_B : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1], \quad A \in \mathcal{F} \longrightarrow P_B(A)=P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$

BISOGNA CONTROLLARE CHE E' UNA PROBABILITA', ossia che EFFETTIVAMENTE

a) $0 \leq P(A|B) \leq 1$, infatti $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$ è sicuramente non negativo, in quanto $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B)>0$

Inoltre per la proprietà di monotonia $P(A \cap B) \leq P(B)$ (in quanto $A \cap B$ è un sottoinsieme di B)

b) $P(\Omega|B)=P_B(\Omega)=1$ infatti $P(\Omega|B) := P(\Omega \cap B)/P(B)=P(B)/P(B)=1$

c) Se A_i sono eventi incompatibili a due a due (ovvero $A_i \cap A_j=\emptyset$ per ogni $i \neq j$) allora $P_B(\bigcup_{i=1,\ldots n} A_i) = \sum_{i=1,\ldots n} P_B(A_i)$ ossia $P(\bigcup_{i=1,\ldots n} A_i|B)= \sum_{i=1,\ldots n} P(A_i|B)$

Infatti

$P(\bigcup_{i=1,\ldots n} A_i|B)= P\big((\bigcup_{i=1,\ldots n} A_i) \cap B\big)/P(B))= P\big(\bigcup_{i=1,\ldots n} (A_i \cap B)\big)/P(B)$ (gli eventi $A_i \cap B$ sono incompatibili a 2 a 2)

$= \big(\sum_{i=1,\ldots n} P(A_i \cap B)\big)/P(B)= \sum_{i=1,\ldots n} P(A_i \cap B)/P(B) = \sum_{i=1,\ldots n} P(A_i|B)$

FORMULA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE E COSTRUZIONE DI SPAZI DI PROBABILITA'

su Probabilità condizionata: definizione e suo utilizzo. Se B è un evento (cioè $B \in \mathcal{F}$) con P(B)>0, ed A è un evento (cioè $A \in \mathcal{F}$), la definizione d Probabilità condizionata di A dato B (sapendo che B si è verificato) si scrive P(A|B) ed è definita come

$P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)$ da cui immediatamente $P(A \cap B)=P(B)\, P(A|B)$ che spesso è il modo con cui si usa la probabilità condizionata, ossia sappiamo calcolare P(B) e P(A|B) e poi calcoliamo la porbabilità dell'intersezione. Inoltre la fomrula $P(A \cap B)=P(B)\, P(A|B)$ è la prima forma della

FORMULA DELLA PROBABILITA' COMPOSTE (detta anche del PRODOTTO):

Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono eventi (cioè $E_i \in \mathcal{F}$ per i=1,..n) con $P(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{n-1})>0$, allora

$P(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{n-1} \cap E_n)=P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3| E_1 \cap E_2) \ldots P(E_j|E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{j-1}) \ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{n-1})$

OSSERVAZIONE ovviamente dati $E_1, E_2, ..., E_n$ anche $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, ..., \tilde{E}_n$ sono eventi, dove $\tilde{E}_j$ sta per E_j o per il suo complementare E_j^c, la formula delle probabilità composte si applica anche a

$P(\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 .... \cap \tilde{E}_{n-1} \cap \tilde{E}_n)$

Ad esempio per n=3

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)=P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3| E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c)=P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3^c| E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3)=P(E_1)\, P(E_2^c|E_1)\, P(E_3| E_1 \cap E_2^c)$

$P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c)=P(E_1)\, P(E_2^c|E_1)\, P(E_3^c| E_1 \cap E_2^c)$

$P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3)=P(E_1^c)\, P(E_2|E_1^c)\, P(E_3| E_1^c \cap E_2 \cap E_3)$

$P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c)=P(E_1^c)\, P(E_2|E_1^c)\, P(E_3^c| E_1^c \cap E_2)$

$P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3)=P(E_1^c)\, P(E_2^c|E_1^c)\, P(E_3| E_1^c \cap E_2^c)$

$P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)=P(E_1^c)\, P(E_2^c|E_1^c)\, P(E_3^c| E_1^c \cap E_2^c)$

e quindi si possono calcolare tutte le probabilità relative a qualunque evento che "riguarda" i tre eventi

AD ESEMPIO per calcolare $P(E_1 \cap E_3)$ consideriamo che

$E_1 \cap E_3=(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3)$

e quindi

$P(E_1 \cap E_3)= P((E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3))= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3)$

CENNO AL COLLEGAMENTO CON LA COSTRUZIONE DELL'ALBERO PER IL CALCOLO DELLE PROBABILITA' in esempi concreti

5) mercoledì 13 marzo 2013

RICHIAMO DELLA FORMULA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE (o del PRODOTTO)

FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI II VERSIONE

e FORMULA DI BAYES I E II VERSIONE

FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI II VERSIONE

Sappiamo che, s e $H_1, H_2, ...H_m$ formano una partizione dell'evento certo

ossia sono disgiunti a due a due (ossia per ogni $i \neq j$ $H_i \cap H_j= \emptyset$,cioè H_i e H_j sono eventi incompatibili)

e $H_1 \cup H_2 \cup .... \cup H_m=\Omega$ (cioè gli eventi $H_1, ... , H_m$ sono esaustivi)

per ogni evento A si ha

$P(A)=P(A \cap H_1)+P(A \cap H_2)+....+P(A \cap H_m)$

SE INOLTRE SUPPONIAMO $P(H_i)>0$ per ogni i=1,..., m e tenendo conto che $P(A \cap H_i)= P(H_i)\, P(A |H_i)$ si ottiene che

$P(A)=P(A \cap H_1)+P(A \cap H_2)+....+P(A \cap H_m) = P(H_1)\, P(A |H_1)+ P(H_2)\, P(A |H_2) +....+ P(H_m)\, P(A |H_m)$

Ovviamente questa formula è utile SOLO quando siamo in grado di calcolare $P(H_i)$ e $P(A|H_i)$ per ogni i.

ESEMPIO: si lancia una moneta equilibrata e

se esce TESTA, si lancia un dado equilibrato e si ottiene come risultato il valore della faccia uscita,

se invece esce CROCE, si lanciano due dadi equilibrati e si ottiene come risultato la somma delle due facce uscite

CALCOLARE la PROBABILITA' DI OTTENERE 6

SOLUZIONE:

Posto H_1= "esce TESTA" e H_2=" esce CROCE" si ha che $P(H_1)=P(H_2)=1/2$ (abbiamo ipotizzato una moneta ben equilibrata)

ed inoltre, nel caso in cui uscisse TESTA, la probabilità che esca come risultato 6 vale 1/6

OSSIA, posto A l'evento" il risultato ottenuto è 6" , la probabilità di A condizionata ad H_1 vale 1/6, cioè si ha $P(A|H_1)=1/6$,

Analogamente, nel caso in cui uscisse CROCE, la probabilità che esca come risultato 6 vale 5/36 (infatti se lancio due dadi si ottiene come somma 6 in uno dei 5 casi (1,5) (2,4) (3,3)(4,2) (5,1) sui 36 possibili,

OSSIA la probabilità di A condizionata ad H_2 vale 5/36, cioè si ha $P(A|H_2)=5/36$,

A questo punto poiché H_1 ed H_2 formano una partizione dell'evento certo,

possiamo affermare che

$P(A)= P(A \cap H_1)+P(A \cap H_2) = P(H_1) P(A|H_1)+ P(H_2) P(A|H_2) = (1/2) (1/6) + (1/2) (5/36) = (1/2) (6/36) + (1/2) (5/36)= 11/72$

SEMPRE NELLA SITUAZIONE PRECEDENTE, SUPPONIAMO DI SAPERE SOLO CHE si è verificato l'evento A ossia che il risultato ottenuto è 6,

OSSIA NON SAPPIAMO SE TALE RISULTATO E' STATO OTTENUTO LANCIANDO UNO O DUE DADI OSSIA se è uscita TESTA o CROCE.

DOMANDA: SAPENDO CHE SI E' VERIFICATO A quanto valgono le probabilità di H_i, per i=1,2?

SOLUZIONE: PRIMA DI TUTTO CHIARIAMO CHE la domanda è: quanto valgono **$P(H_1|A)$ e $P(H_2|A)$?**

Anche se non sappiamo la risposta possiamo subito dire che $P(H_2|A)=1- P(H_1|A)$, infatti $H_2=H_1^c$ e $P_A(H_i)=P(H_i|A)$ è una probabilità

per definizione si ha

$P(H_1|A)=P(A \cap H_1)/P(A)= P(H_1) P(A|H_1)/P(A) = (1/2) (1/6)/(11/72)$

alternativamente possiamo utilizzare il fatto che $P(A)= P(H_1) P(A|H_1)+ P(H_2) P(A|H_2)$ e scrivere

$P(H_1|A)=P(A \cap H_1)/P(A)= P(H_1) P(A|H_1)/P(A) = P(H_1) P(A|H_1) / [P(H_1) P(A|H_1)+ P(H_2) P(A|H_2)]$

in questo caso è conveniente infatti ci viene

$P(H_1|A) = P(H_1) P(A|H_1) / [P(H_1) P(A|H_1)+ P(H_2) P(A|H_2)] = (1/2) (1/6) / [(1/2) (1/6) + (1/2) (5/36)]= (1/2) (6/36) / [(1/2) (6/36) + (1/2) (5/36)]$

(semplificando (1/2) (1/36) a numeratore e a denominatore) = 6/ [6+5] = 6/11

e quindi

$P(H_2|A)=5/11$

Si osservi che se invece fosse stata chiesta la probabilità di H_i dato l'evento E="il risultato ottenuto è 7" avremmo potuto dire immediatamente che

$P(H_1|E)=0$ e $P(H_2|E)=1$. E ancora, postp F="il risultato ottenuto è 1" si ha che $P(H_1|F)=1$ e $P(H_2|F)=0$.

QUESTO risultato E' UN CASO PARTICOLARE DELLA **FORMULA DI BAYES**

Dati due eventi A e B , con $P(A)>0$ e $P(B) >0$ si ha

$P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)= P(B)P(A|B)/P(A)$ (e anche $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)= P(A)P(B|A)/P(B)$]

L'interessante viene quando si ha una partizione $H_1, ..., H_m$ con $P(H_i)>0$ per ogni i per cui

$P(H_i|A)=P(A \cap H_i)/P(A)= P(H_i) P(A |H_i)/P(A)$ (formula di Bayes I versione)

$= P(H_i) P(A |H_i)/ [\Sigma_k P(H_k)P(A|H_k)]$ (formula di Bayes II versione)

dove si è tenuto conto della formula delle probabilità totali (II versione)

OSSERVAZIONE in tale contesto H_i sono dette ipotesi, $P(H_i)$ sono dette le probabilità a priori, $P(A|H_i)$ sono dette le verosimiglianze e infine

$P(H_i|A)$ sono dette probabilità a posteriori.

Si ha che $P(H_i|A)$ sono proporzionali al prodotto della probabilità a priori e delle verosimiglianze.

ESERCIZI SUL GIOCO DEL LOTTO

CALCOLO DELLA PROBABILITA' DI CINQUINA, QUATERNA, TERNO, AMBO E NUMERO SINGOLO (su una ruota fissata)

e relazione con la formula delle probabilità composte

QUI RIPORTIAMO SOLO il "terno"

ESTRAZIONI SENZA REINSERIMENTO: GIOCO DEL LOTTO, calcolo di ambo, terno, quaterna e cinquina, su una ruota fissata (ad esempio la ruota di Roma), IN TRE MODI

(a) prendendo Ω uguale alle disposizioni di 90 elementi (i numeri da 1 a 90) di classe 5

Esempio del terno: i casi possibili sono $D^{90}_5= 90 *89*88*87*86$,

fissate le posizioni di uscita e l'ordine di uscita dei 3 numeri giocati i casi favorevoli sono $87*86=D^{87}_2$, per ognuno di questi casi, ci sono poi

$5*4*3 =D^5_3=C^5_3 P_3$ modi per fissare posizione e ordine di uscita e quindi i casi favorevoli sono in totale $5*4*3*87*86$

e infine la probabilità di terno si calcola come $5*4*3*87*86/(90 *89*88*87*86)$

(a bis) prendendo Ω uguale alle combinazioni di 90 elementi (i numeri da 1 a 90) di classe 5 **(come se fossero estrazioni in blocco: ATTENZIONE questo è possibile solo perché negli eventi considerati l'ordine di estrazione non ha importanza)**

Esempio del terno: i casi possibili sono $C^{90}_5=90!/(85! * 5!)=D^{90}_5/ P_5$

i casi favorevoli si calcolano pensando che i 3 numeri giocati (come se fossero palline bianche) devono essere tutti scelti e quindi in $C^3_3=3!/(3! 0!)=D^3_3 /P_3$ modi

e ci sono $C^{87}_2 = 87!/(2! 85!)=D^{87}_2/P_2$ modi di prendere due degli 87 numeri rimasti quindi i casi favorevoli sono $C^3_3*C^{87}_2$

e la probabilità di fare terno vale

$C^3_3*C^{87}_2/C^{90}_5= (D^3_3 /P_3)* (D^{87}_2/P_2)/(D^{90}_5/ P_5)= (P_5/(P_2*P_3)) * (D^3_3 *D^{87}_2/D^{90}_5) = (P_5/(P_2*P_3)) * (P_3 *D^{87}_2/D^{90}_5)$

(b) utilizzando le probabilità condizionali e la formula delle probabilità composte: posto E_j=" esce il numero j sulla ruota di Roma" (senza specificare la posizione)

se abbiamo giocato il terno con i numeri 3, 19 e 61, l'evento "esce il terno" si scrive come $E_3 \cap E_{19} \cap E_{61}$

e quindi per la formula delle probabilità composte si ha

$P(E_3 \cap E_{19} \cap E_{61})=P(E_3)\, P(E_{19}|E_3)\, P(E_{61}|\, E_3 \cap E_{19})= (5/90)*(4/89)*(3/88)$

infatti ad esempio $E_3=E_3^{(1)} \cup E_3^{(2)} \cup E_3^{(3)} \cup E_3^{(4)} \cup E_3^{(5)}$,

dove $E_3^{(i)}$ rappresenta l'evento " il 3 esce al posto i-simo" (per i =1,2,3,4,5)

e quindi $P(E_3)=P(E_3^{(1)}) +P(E_3^{(2)}) + P(E_3^{(3)}) +P(E_3^{(4)}) +P(E_3^{(5)}) = (1/90) + (1/90) +(1/90) +(1/90) +(1/90) = 5/90$

Infatti la cardinalità di $E_3^{(i)}$ è la stessa per ogni i, ad esempio

$E_3^{(1)}$={ (3, i, j,k, l) disposizioni di 90 elementi di classe 5 } e $E_3^{(2)}$={ (i, 3, j,k, l) disposizioni di 90 elementi di classe 5 }

i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca: basta scambiare le prime due componenti e quindi hanno la stessa cardinalità

i casi favorevoli a $E_3^{(1)}$ sono chiaramente $1 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ e quindi $P(E_3^{(1)})= 1/90$ [$= 1 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86/ (90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86)$]

ESERCIZIO 2.

2a. Se sappiamo che $P(A \cap B)= 2 P(A \cap B^c)$, $P(A^c \cap B^c)=2 P(A \cap B)$ e $P(A^c \cap B)= 2 P(A^c \cap B^c)$ possiamo trovare P(A)?

SOLUZIONE: posto ad esempio $p_0=P(A^c B^c)$, $p_1= P(A \cap B^c)$, $p_2= P(A^c \cap B)$ e $p_3= P(A \cap B)$

abbiamo

$p_0,p_1, p_2, p_3 \geq 0$,

$p_0+ p_1+ p_2+ p_3=1$ (infatti $H_0=A^c \cap B^c$, $H_1=A \cap B^c$, $H_2=A^c \cap B$, $H_3= A \cap B$ formano una partizione dell'evento certo)

$p_3=2 p_1$ (dalle relazioni precedenti)

$p_0=2 p_3$

$p_2=2 p_0$

Abbiamo quindi 4 equazioni nelle 4 incognite p_0, p_1, p_2 e p_3 (e ci aspettiamo di trovare una soluzione, ma ATTENZIONE dovremo controllare se p_i sono tutte non negative) e la risposta sarà $P(A)= P(A \cap B) + P(A \cap B^c)= p_3 +p_1$

Per risolvere il sistema possiamo, ad esempio, esprimere tutte le p_1,p_2 e p_3 in funzione di p_0, ossia

$p_2= 2p_0$, $p_3=p_0/2$ e $p_1=p_3/2=p_0/4$

e infine $p_0 + p_0/4 + 2 p_0 + p_0/2=1$, ossia $p_0 (1+1/4+2+1/2) = p_0 \; 15/4=1$ da cui $p_0=4/15$

e di conseguenza

$p_1= 1/15$ $p_2=8/15$ e $p_3= 2/15$

e infine $P(A)= p_1+p_3= 3/15=1/5$

2b. Se invece sappiamo solo che $P(A \cap B)= 2 P(A \cap B^c)$, $P(A^c \cap B^c)=2 P(A \cap B)$ possiamo trovare delle limitazioni per P(A)?

in questo caso abbiamo solo

$p_0, p_1, p_2, p_3 \geq 0$,

$p_0+ p_1+ p_2+ p_3=1$ (infatti $H_0=A^c \cap B^c$, $H_1=A \cap B^c$, $H_2=A^c \cap B$, $H_3= A \cap B$ formano una partizione dell'evento certo)

$p_3=2 p_1$ (dalle relazioni precedenti)

$p_0=2 p_3$

Ad esempio, posto $p_1=\alpha$, si ha

$p_3=2 \alpha$, $p_0= 2p_3=4 \alpha$, e infine $p_2=1 - p_0 - p_1 - p_3=1 - (4 \alpha + \alpha +2 \alpha)= 1-7\alpha$,

da cui $P(A)=p_1+p_3= \alpha + 2 \alpha = 3 \alpha$.

Per finire l'esercizio bisogna trovare le limitazioni per α: ora il parametro α deve essere non negativo (dalle condizione $p_i \geq 0$) e d'altra parte anche $p_2=1-7 \alpha$ deve essere non negativo per cui $0 \leq \alpha \leq 1/7$ e di conseguenza le limitazioni cercate sono

$0\leq P(A)=3\alpha \leq 3/7$.

7) venerdì 15 marzo 2013

PROBLEMA di un test medico sull'HIV (si trova sugli Appunti di Calcolo delle Probabilità di Spizzichino Nappo)

Situazione: H= " avere il virus", T^+="risultare positivo al test"

il test è "economico", MA NON è sicuro al 100% nel senso che può dare

sia falsi positivi (cioè si può risultare positivo senza avere il virus)

sia falsi negativi (cioè si può risultare negativi al test anche avendo il virus)

noti P(H) e P(T^+|H) e P(T^+|H^c)

calcolati come

P(H) = frequenza relativa dei malati di AIDS in una popolazione fissata,

P(T^+|H)= frequenza relativa delle volte che un malato di AIDS è risultato positivo al test =1- P(T^-|H), dove P(T^-|H)= frequenza relativa dei falsi negativi

P(T^+|H^c) = frequenza relativa dei falsi positivi

(evidentemente c'è un test più costoso, ma sicuro che permette di sapere con certezza se un individuo ha l'AIDS e no, e quindi permette di ottenere queste frequenze)

DATI del PROBLEMA: P(H)=0.6% (dato verosimile per New York nel 1990) P(T^+|H)=99,9% e P(T^+|H^c) =1% (dati di fantasia)

DOMANDE:

i) calcolare la probabilità di risultare positivi al test

ii) calcolare la probabilità di avere il virus, sapendo che si è risultati positivi al test (cioè calcolare P(H|T^+)

il calcolo va fatto tenendo conto che P(T^+|H) e P(T^+|H^c) non cambiano, ma può cambiare P(H), se cambia la popolazione, ossia se un individuo è scelto a caso nella popolazione di riferimento, oppure in un'altra popolazione: ad esempio, se la persona e' scelta a caso tra tutta la cittadinanza di New York, si prenderà come probabilità a priori, ossia P(H)=0,6%, se invece tra i tossico-dipendenti di New York, e che e' stato a contatto con malati di AIDS, tale probabilità la probabilità dovrebbe essere molto più alta ad esempio si potrebbe prendere P(H)=1/2 (dato di fantasia)

i) SOLUZIONE: Si chiede P(T^+). Si osserva che H e H^c formano una partizione dell'evento certo e quindi possiamo usare la formula delle probabilità totali, tenendo conto che P(H^c)=1-P(H) si ha

P(T^+)=P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)=(6/1000) (999/1000)+(994/1000)(1/100)=0,015 circa

ii)SOLUZIONE: SI CHIEDE P(H|T^+), e si può usare la formula di BAYES

P(H| T^+)=P(H)P(T^+|H)/P(T^+)= P(H)P(T^+|H)/ [P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)])=(6/1000) (999/1000) / [(6/1000) (999/1000)+(994/1000)(1/100)]

= (6/1000) (999/1000) / [(6/1000) (999/1000)+(994/1000)(10/1000)]= 6·999 / [(6·999+994·100] =0.378 circa

ATTENZIONE e' molto più alta di 0,006, ma più piccola di un mezzo,

VA NOTATO CHE se invece la persona che fa il test appartiene a una categoria a rischio e si stimasse P(H) circa 1/2 avremmo avuto invece

P(H| T^+)=P(H)P(T^+|H)/P(T^+)= P(H)P(T^+|H)/ [P(H)P(T^+|H)+P(H^c)P(T^+|H^c)])=(1/2) (999/1000) / [(1/2) (999/1000)+(1/2)(10/1000)]

= 999 / [999+10]= 999 /1009 =0.99 circa

LANCIO DI UNA MONETA

ESERCIZIO 3.

Si lancia n volte una moneta ben equilibrata **(il numero di lanci è FISSATO e UGUALE AD n)**

3a. per h=1,2,...n calcolare la probabilità di "nessuna testa nei primi h lanci" e la probabilità di " nessuna testa nei primi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

3b. per h=1,2,...n calcolare la probabilità di "nessuna testa negli ultimi h lanci " e la probabilità di " nessuna testa negli ultimi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

3c. per k=0,1,2,...,n calcolare la probabilità dell'evento "Croce si presenta esattamente k volte (negli n lanci)"

[si osservi che equivalentemente si potrebbe chiedere " Croce si presenta esattamente n-k volte (negli n lanci)"]

[si controlli che la somma di tutte queste probabilità vale 1]

si inizia con un caso specifico n=5 k=0, k=1, k=2,

3a.SOLUZIONE posto A_h l'evento "nessuna testa nei primi h lanci" si ha A_h ={ (C,C,..,C,x_{h+1},x_{h+2},...x_n) con x_i=C o T} ,

ossia i casi favorevoli sono 1·1·..·1·2·2·...·2=1^h 2^{n-h}, e i casi possibili sono 2^n

Quindi P(A_h)=1/2^h [=2^{n-h}/2^n=2^{-h}]

postp E_h l'evento " nessuna testa nei primi h lanci e nei rimanenti tutte teste" si ha ha E_h ={ (C,C,..,C,T, ..., T)} ossia un solo caso favorevole

e quindi P(E_h)=1/2^h

3b. SOLUZIONE posto B_h l'evento "nessuna testa negli ultimi h lanci " e F_h l'evento " nessuna testa negli ultimi h lanci e nei rimanenti tutte teste"

si ha P(B_h)=P(A_h) e P(F_h)=P(E_h)

3.c posto C_k l'evento "Croce si presenta esattamente k volte (negli n lanci)" si ha che C_0={(T,T,...T)} e P(C_0)=1/2^n, per k >=1

C_k è l'unione di eventi del tipo di E_k o F_k, che differiscono l'uno dall'altro solo per dove sono le k croci negli n posti disponibili

(possono essere i primi k e nei rimanenti ci sono teste, oppure dal secodno al k+1-simo, etc.) si tratta di C^n_k modi distinti e tutti di probabilità 1/2^n

quindi P(C_k)= C^n_k 1/2^n

VERIFICA: gli eventi C_0, C_1,...,C_n formano una partizione dell'evento certo (infatti sicuramente se ne verifica almeno uno e uno solo) quindi necessariamente

Somma_{k=0,...n}P(C_k)=1 e come controprova si ha

Somma_{k=0,...n} C^n_k 1/2^n= (1/2^n) Somma_{k=0,...n} C^n_k=(1/2^n) Somma_{k=0,...n} C^n_k 1^k 1^{n-k}= (1/2^n) (1+1)^n=1

ESERCIZIO 4

Si effettuano n estrazioni **con reinserimento** da un' urna di composizione NOTA, ossia con b palline bianche ed r palline rosse

(ATTENZIONE il numero n di estrazioni è FISSATO e b ed r sono NOTI)

(stesso tipo di domande dell'esercizio precedente)

4a. per h=1,2,...n calcolare la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle prime h estrazioni" e la probabilità di " nessuna pallina rossa nelle prime h estrazioni e nelle rimanenti estrazioni tutte palline rosse"

4b. per h=1,2,...n calcolare la probabilità di "nessuna pallina rossa nelle ultime h estrazioni " e la probabilità di " nessuna pallina rossa nelle ultime h estrazioni e nelle rimanenti estrazioni tutte palline rosse"

4c. per k=0,1,2,...,n calcolare la probabilità dell'evento " escono esattamente k palline bianche (nelle n estrazioni)"

[si osservi che equivalentemente si potrebbe chiedere " Croce si presenta esattamente n-k volte (negli n lanci)"]

ESERCIZIO 5.

Si lancia una moneta ben equilibrata fina a quando si ottiene TESTA per la prima volta **(ATTENZIONE il numero di lanci NON è FISSATO)**

Si pone X= numero (aleatorio) di lanci effettuati

5a. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X=h"="il numero di lanci effettuati è h"="TESTA esce per la prima volta all' h-simo lancio"

5b. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X>h"="il numero di lanci effettuati è (strettamente) maggiore di h"="nessuna testa negli primi h lanci "

5c. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di "X<=h"="il numero di lanci effettuati è minore o uguale ad h"="almeno una testa nei primi h lanci "

si inizia con un caso specifico n=5 k=0, k=1, k=2,

ESERCIZIO 6

Si effettuano estrazioni **con reinserimento** da un' urna di composizione NOTA, ossia con b palline bianche ed r palline rosse, fino a quando si ottiene una pallina BIANCA per la prima volta

(ATTENZIONE il numero n di estrazioni NON è FISSATO, ANCHE SE b ed r sono NOTI)

(stesso tipo di domande dell'esercizio precedente)

Si pone X_B= numero (aleatorio) di estrazioni effettuate (per ottenere per la prima volta pallina bianca)

5a. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di

"X_B=h"="il numero di estrazioni effettuate è h"="pallina bianca esce per la prima volta all' h-sima estrazione"

5b. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di

"X_B>h"="il numero di estrazioni effettuate è (strettamente) maggiore di h"="nessuna pallina bianca nelle prime h estrazioni "

5c. per h=1,2,...m, m+1,... (h>=1) calcolare la probabilità di

"X<=h"="il numero di estrazioni effettuate è minore o uguale ad h"="almeno una pallina bianca nelle prime h estrazioni "

si inizia con un caso specifico n=5 k=0, k=1, k=2,

10) lunedì 18 marzo 2013

ESERCIZIO su estrazioni (febbraio 2013) e paradosso di Bertrand e sul figlio maschio o sul figlio primogenito maschio..

Problema del paradosso di Bertrand (tre scatole identiche contengono rispettivamente

U_0: due monete d'argento,

U_1: una moneta d'argento e una d'oro

U_2: due monete d'oro

Ne viene scelta una a caso e viene estratta una moneta. Sapendo che la moneta estratta e' d'oro, calcolare la probabilità che anche la moneta rimanente nella scatola e' d'oro.

SOLUZIONE: Posto U_i="viene scelta l'urna che contiene i monete d'oro" e G_1="la prima moneta estratta e' d'oro"

stiamo chiedendo di calcolare P(U_2|G_1) in quanto, sapendo che la prima moneta estratta e' d'oro, e' equivalente chiedere che l'urna scelta sia quella che contiene due monete d'oro oppure chiedere che la moneta rimanente sia anch'essa d'oro.

Per la formula delle probabilità totali, rispetto alla partizione U_0, U_1, U_2 e all'evento G_1 si ha

P(U_2|G_1)=P(U_2)P(G_1|U_2)/[P(U_0)P(G_1|U_0)+P(U_1)P(G_1|U_1)+P(U_2)P(G_1|U_2)]

=(1/3)*1/[(1/3)*0+(1/3)*(1/2)+(1/3)*1]=1/[0+(1/2)+1]=1/(3/2)=2/3

Posto il problema di Monty Hall, senza soluzione

Problema degli accoppiamenti o delle concordanze o della segretaria (o equivalentemente del guardarobiere)

[Matching Problem] APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

La segretaria ha N lettere indirizzate a N persone distinte ed N buste con già scritti gli N indirizzi: le cadono tutte le N lettere e quindi mette le N lettere a caso nelle N buste.

(i) Quanto vale la probabilità p(N) che nessuna lettera sia nella busta corrispondente?

(ii) Quanto vale la probabilità q(N) che ci sia almeno una lettera nella busta corrispondente?

La probabilità in (i) è il complementare a 1 della probabilità in (ii) [ossia $p(N)=1-q(N)$]

Per calcolare $q(N)$ si pone A_i= la lettera i-sima e' nella busta i-sima, di modo che

$q(N)=P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N)$

$= P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_N) - [P(A_1 \cap A_2)+ P(A_1 \cap A_3)+\ldots+ P(A_i \cap A_j)+\ldots]+\ldots+(-1)^{k-1} \sum_{i_1,i_2,..,i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap\ldots\cap A_{i_k}) +\ldots+(-1)^{N-1} P(A_1 \cap A_2 \cap\ldots\cap A_N)$

ora, qualunque sia la combinazione $\{i_1,i_2,..,i_k\}$, si ha $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap\ldots\cap A_{i_k})= (N-k)!/N!$ e quindi la somma

$\sum_{i_1,i_2,..,i_k} P(A_{i_1} n A_{i_2} n\ldots n A_{i_k})$

fatta su tutte le $N!/[k!(N-k)!]$ combinazioni di N elementi di classe k vale

$N!/[k!(N-k)!] \ (N-k)!/N! =1/k!$

di conseguenza

$q(N)=1/1! - 1/2! + 1/3! - 1/4! +\ldots\ldots+ (-1)^{k-1} 1/k! +\ldots\ldots+ (-1)^{N-1} 1/N!$

e

$p(N)=1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! +\ldots\ldots+ (-1)^k 1/k! +\ldots\ldots+ (-1)^N 1/N! = \sum_{k=0,1,\ldots N}(-1)^k 1/k!$ che converge (per N che tende ad infinito) a e^{-1} (ossia poco più di un terzo, anzi circa 1/2,71)

del resto per N=3 viene

$p(3)=1-1/1! + 1/2! - 1/3! = 1/2- 1/6=2/3$

$p(4)= 1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4!= 1/2- 1/6+1/24=17/24$

$p(5)= 1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! -1/5!=1/2- 1/6+1/24-1/120=84/120$

(iii) Quante sono le permutazioni $(i_1,i_2, \ldots i_N)$ di N elementi che non presentano punti fissi (ossia per le quali, qualunque sia j, il valore i_j è diverso da j)

Risposta: $N!p(N)$ ossia N!moltiplicato per la probabilità $p(N)$ che nessuna lettera sia nella busta corrispondente.

OSSERVAZIONE Lo stesso vale per ogni m, ossia ci sono $m!p(m) = m! (1-1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \ldots (-1)^m 1/m!)$

permutazioni di m elementi che non hanno punti fissi.

(iv) Quanto vale la probabilità $p(k;N)$ che ci siano esattamente k lettere nella busta corrispondente? (ossia le altre sono tutte in buste sbagliate)

Risposta $p(N-k)/k!$:

Prima di tutto notiamo che, qualunque sia N, $p(N)=p(0;N)$.

I casi favorevoli si contano tenendo presente che si possono scegliere in C^N_k modi possibili quali sono le k lettere nella busta giusta (cioè i k valori j per i quali $i_j=j$) , e che **per ognuna di queste scelte** ci sono poi tante scelte quante sono le permutazioni dei rimanenti N-k elementi con nessun punto fisso. Per il punto precedente queste ultime sono $(N-k)! \ p(N-k)$. In conclusione

$p(k;N)=C^N_k$ #{permutazioni di N-k elementi che non presentano punti fissi}$/N!=(N!/[k! (N-k)!]) (N-k)! \ p(N-k) /N!= p(N-k)/k!$

11) mercoledì 20 marzo 2013

Soluzione del problema di MONTY HALL (vedere file allegato su TWIKI) con variante in cui il presentatore sceglie la porta più vicina a lui con probabilità p invece che 1/2.

INDIPENDENZA (in senso probabilistico) di due eventi

Definizione: d**ati due eventi A e B, si dice che A e B sono indipendenti se $P(A\cap B)=P(A)P(B)$**

OSSERVAZIONE nel caso in cui $P(A)>0$ e $P(B)>0$, e' equivalente a dire che $P(A|B)=P(A)$ oppure $P(B|A)=P(B)$

(che in alcuni testi è data come definizione di indipendenza)

AFFERMAZIONE1

Se A e B sono indipendenti allora lo sono anche A e B^c cioè $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ implica $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$

[dimostrazione: $P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A)$, e quindi$P(A\cap B^c)=P(A)- P(A\cap B)$, se A e B sono indipendenti allora

$P(A\cap B^c)=P(A)- P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(B^c)$]

con dimostrazioni simili si ottiene che vale anche $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$ e $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$

[basta scambiare A e B per dimostrare che $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$, oppure partire da $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$ e ottenere $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$]

In conclusione possiamo affermare che " A e B sono indipendenti" è equivalente ad affermare che

$P(A^{\sim}\cap B^{\sim})=P(A^{\sim})P(B^{\sim})$ dove $A^{\sim}$ può essere A o A^c e $B^{\sim}$ può essere B o B^c (in totale 4 relazioni)

OSSERVAZIONE Se $P(A)=0$ allora qualunque sia B vale $P(A\cap B)= P(A)P(B)$,

cioè gli insiemi di probabilità nulla sono indipendenti da qualsiasi evento

[dimostrazione: $A\cap B$ è contenuto in A e quindi $0<=P(A\cap B)<= P(A)=0$ quindi $P(A\cap B)= 0$ e anche $P(A)P(B)=0$]

ATTENZIONE ALLA DIFFERENZA TRA INDIPENDENZA (in senso probabilistico o stocastico) e INDIPENDENZA LOGICA:

Se A e B sono eventi con probabilità non nulla (cioè positiva : $P(A)>0$ e $P(B)>0$) e sono incompatibili (ovvero sono disgiunti: $A\cap B=\varnothing$) allora A e B NON SONO INDIPENDENTI

[dimostrazione: $P(A)P(B)>0$ mentre $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$ quindi $P(A\cap B) < P(A)P(B)$ e A e B non sono indipendenti (anzi si vede che allora A e B sono correlati negativamente: per la definzione di eventi correlati positivamente e negativamente si vedano le lezioni successive)]

Esempi di eventi indipendenti e NON

ESEMPIO 1: da un mazzo di carte francesi (52 carte: 4 semi, cuori quadri fiori picche, per ciascun seme tredici carte, ossia A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K) si estrae una carta.

evento A = " esce un asso", evento C = " esce una carta di cuori", $A\cap C$ =" esce l'asso di cuori"

$P(A)=4/52= 1/13$, $P(C)=13/52=1/4$, $P(A\cap C)=1/52$ $P(A)P(C)= (1/13) (1/4) =1/52$

quindi A e C SONO INDIPENDENTI

ESEMPIO 1 bis: da un mazzo di carte francesi con due Jolly (come prima 52 carte più 2 Jolly, quindi 54 carte in totale) si estrae una

carta.

evento A = " esce un asso", evento C = " esce una carta di cuori", $A \cap C$ =" esce l'asso di cuori"

$P(A)=4/54= 2/27$, $P(C)=13/54$, $P(A \cap C)=1/54$ $P(A)P(C)= (2/27) (13/54) = (26/27)(1/54)$ diverso da $1/54$

quindi A e C NON SONO INDIPENDENTI

ESEMPIO 2 (non svolto a lezione) Si lanciano due dadi ben equilibrati. Sia X_1 il valore del primo dado e X_2 il valore del secondo dado. Si considerino gli eventi

$E=\{X_1=3\}$ ed $F=\{X_1+X_2=7\}$ per cui $E \cap F=\{X_1=3\ X_2=4\}$

Preso $\Omega=\{(i,j)$ con i, j in $\{1,2,3,4,5,6\}\}$ si ha che E ed F sono indipendenti

$E=\{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$ e $P(E)=1/6$

$F=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ e $P(F)=6/36=1/6$

$E \cap F=\{(3,4)\}$ e $P(E \cap F)=1/36$

ESEMPIO 2 bis (non svolto a lezione)

stessa situazione, ma sia $G=\{X_1+X_2=4\}$, allora gli eventi E e G NON SONO INDIPENDENTI: infatti

$E=\{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$ e $P(E)=1/6$

$G=\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ e $P(G)=3/36=1/12$

$E \cap G=\{(3,1)\}$ e $P(E \cap G)=1/36$ diverso da $P(E)P(G)=(1/6) (1/12)=1/72$

ESEMPIO 3 (come in ESEMPIO 2) Si lanciano due dadi ben equilibrati. Sia X_1 il valore del primo dado e X_2 il valore del secondo dado. Si considerino gli eventi $A=\{X_1$ è pari$\}$ e $B=\{X_2$ è pari$\}$

Gli eventi A e B sono indipendenti?

$P(A)=1/2[=(3 \cdot 6)/(6 \cdot 6)]$ $P(B)=1/2[=(6 \cdot 3)/(6 \cdot 6)]$ $P(A \cap B) = (3 \cdot 3)/(6 \cdot 6)= 1/4$

Si ha $P(A \cap B)=1/4= (1/2) (1/2) =P(A) P(B)$ QUINDI A e B sono eventi indipendenti

ESEMPIO 3 bis Siano A e B come in Esempio 3, e sia $C=\{X_1+X_2$ dispari$\}$

i) A e C sono indipendenti: infatti sappiamo che $P(A)=1/2$

inoltre $P(C)=18/36=1/2$ [si può calcolare come casi favorevoli/casi possibili, ma vedremo un altro modo]

Si noti che

$A \cap C=\{X_1$ pari, e X_1+X_2 dispari$\}=\{X_1$ pari, e X_2 dispari$\}= A \cap B^c$

quindi

$P(A\cap C)=P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$ [per l'indipendenza di A e B] e quindi

$P(A\cap C)=P(A)P(B^c)=(1/2)\ (1/2)=P(A)P(C)$ c.v.d.

calcolo alternativo di P(C) si può osservare che

$C=\{X_1+X_2 \text{ dispari}\}=\{(X_1 \text{ pari e } X_2 \text{ dispari}) \text{ oppure } (X_1 \text{ dispari e } X_2 \text{ pari})\}=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

per cui $P(C)=P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)=P(A)P(B^c)+P(A^c)P(B)=(1/2)(1/2)+(1/2)(1/2)=1/2$

ii) MOSTRARE che B e C sono indipendenti [per casa: la dimostrazione è identica al caso i)]

iii) $A\cap B$ e C NON SONO INDIPENDENTI (in senso probabilistico):

$(A\cap B)\cap C=\emptyset$ [infatti X_1 e X_2 entrambi pari, è incompatibile con X_1+X_2 dispari]

quindi $P((A\cap B)\cap C)=0\neq P(A\cap B)\,P(C)$ [>0]

FINORA ABBIAMO VISTO DUE EVENTI PER VOLTA: COSA ACCADE QUANDO SI CONSIDERANO 3 EVENTI TUTTI INSIEME?

DEFINZIONE: TRE EVENTI A, B, C SONO (GLOBALMENTE o COMPLETAMENTE) INDIPENDENTI SE

(*) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$ $P(B\cap C)=P(B)P(C)$ e $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

[si dice anche che A,B e C formano una famiglia di eventi (globalmente o completamente) indipendenti]

AFFERMAZIONE:

la precedente proprietà è equivalente a chiedere che

(**) $P(\tilde{A}\cap\tilde{B}\cap\tilde{C})=P(\tilde{A})P(\tilde{B})\,P(\tilde{C})$ dove $\tilde{A}$ può essere A o A^c e $\tilde{B}$ può essere B o B^c e $\tilde{C}$ può essere C o C^c

(in totale $2^3=8$ relazioni)

[dimostrazione:

PRIMA PARTE: per vedere che (**) implica (*) notiamo che

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ è valida prendendo $\tilde{A}=A$, $\tilde{B}=B$ e $\tilde{C}=C$

per ottenere $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ basta osservare che

$A\cap B=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$ da cui

$P(A\cap B)=P((A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c))=P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C^c)=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C^c)$

$=P(A)P(B)[P(C)+P(C^c)]=P(A)P(B)\,1=P(A)P(B)$

le altre relazioni si dimostrano in modo analogo

----------LA DIMOSTRAZIONE DELLA SECONDA PARTE E' STATA SVOLTA NELLA LEZIONE DI LUNEDI'

(ma la riporto qui per comodità) SECONDA PARTE: per vedere che (*) implica (**) vediamo che

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ è valida

per ottenere, ad esempio,

$P(A\cap B\cap C^c)=P(A)P(B)P(C^c)$ possiamo procedere osservando che

$A\cap B= (A\cap B\cap C) \cup (A\cap B\cap C^c)$ da cui

$P(A\cap B)= P\big((A\cap B\cap C) \cup (A\cap B\cap C^c)\big) = P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C^c)$

la precedente uguaglianza, tenendo presente la (*), diviene

$P(A)P(B)=P(A)P(B)P(C)+ P(A\cap B\cap C^c)$

da cui

$P(A\cap B\cap C^c)=P(A)P(B)-P(A)P(B)P(C)=P(A)P(B)[1-P(C)]=P(A)P(B)P(C^c)$

le relazioni $P(A\cap B^c\cap C)=P(A)P(B^c)P(C)$ e $P(A^c\cap B\cap C)=P(A^c)P(B)P(C)$ si ottengono in modo analogo

e da queste si ottengono anche

$P(A\cap B^c\cap C^c)=P(A)P(B^c)P(C^c)$

infatti

$A\cap B^c= (A\cap B^c\cap C) \cup (A\cap B^c\cap C^c)$ da cui

$P(A\cap B^c)= P\big((A\cap B^c\cap C) \cup (A\cap B^c\cap C^c)\big) = P(A\cap B^c\cap C) + P(A\cap B^c\cap C^c)$.

La precedente uguaglianza, tenendo presente la (*), il fatto che $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ implica $P(\tilde{A}\cap \tilde{B})=P(\tilde{A})P(\tilde{B})$ e il fatto che abbiamo già dimostrato che $P(A\cap B^c\cap C)=P(A)P(B^c)P(C)$ diviene

$P(A)P(B^c)=P(A)P(B^c)P(C)+ P(A\cap B^c\cap C^c)$

da cui

$P(A\cap B^c\cap C^c)=P(A)P(B^c)-P(A)P(B^c)P(C)=P(A)P(B^c)[1-P(C)]=P(A)P(B^c)P(C^c)$

e così via.

12) venerdì 22 marzo 2013 (SCIOPERO dei mezzi pochi studenti)

SONO STATI SVOLTI ALCUNI ESERCIZI, tra i quali:

Esercizio 3.9. (appunti Nappo-Spizzichino) Vengono lanciati contemporaneamente 5 dadi perfetti.

Calcolate la probabilità degli eventi elencati qui di seguito:
a) {tutti i dadi danno punteggi diversi fra loro}
b) {due dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri tre danno punteggi tutti diversi} (“coppia”)
c) {tre dadi danno punteggi uguali fra loro e gli altri due danno due punteggi diversi} (“tris”)

d) {quattro dadi danno punteggi uguali fra loro e uno da un punteggio diverso} (“poker”)
e) {tutti i dadi danno lo stesso punteggio} (“jazzi”)
f) {due diverse coppie di punteggi fra loro uguali e un punteggio diverso dagli altri due} (“doppia coppia”)
g) {tre punteggi uguali fra loro e gli altri due uguali fra loro e diversi dal precedente} (“full”).

---

13) lunedì 25 marzo 2013

INDIPENDENZA DI tre eventi (seconda parte della dimostrazione della equivalenza delle due formulazioni)

INDIPENDENZA DI n EVENTI

n eventi A_1, A_2, ..., A_n si dicono indipendenti o che formano una famiglia di eventi indipendenti

se e solo se

DEFINIZIONE 1

per ogni k=2,3,...,n e per ogni scelta di $\{i_1,i_2,...,i_k\} \subseteq \{1,2,...,n\}$

$P(A_i_1 \cap A_i_2 \cap ... \cap A_i_k)= P(A_i_1)\, P(A_i_2) \cdots P(A_i_k)$

DEFINIZIONE 2

P(A*_1 ⋂ A*_2⋂ ... ⋂ A*_n)= P(A*_1) P(A*_2) ··· P(A*_n)

dove A*_i può essere uguale ad A_i oppure al suo complementare (A_i)^c

---

LE DUE DEFINIZONI SONO EQUIVALENTI

ESEMPIO GENERALE : n ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO da un'URNA CON COMPOSIZIONE NOTA:

n ESTRAZIONI CON REISERIMENTO da un'urna che contiene b palline bianche ed r palline rosse

Posto B_i="i-sima pallina estratta bianca" e R_i="i-sima pallina estratta rossa" (=B_i^c)

MOSTRIAMO CHE, SE LA COMPOSIZIONE E' NOTA ALLORA gli eventi B_1, ..., B_n sono indipendenti

CASO n=3

calcolo di P(B_1)=b/(b+r) [= b(b+r)(b+r)/(b+r)^3]

calcolo di P(B_2)=b/(b+r) [= (b+r)b(b+r)/(b+r)^3]

calcolo di P(B_3)=b/(b+r) [= (b+r)(b+r)b/(b+r)^3]

da cui, posto $p=b/(b+r)$ si ha $P(B_i^c= P(R_i)=r/(b+r)=1-p$

calcolo di $P(B_1\cap B_2 \cap B_3)=(bbb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1\cap B_2 \cap B_3)= P(B_1) P(B_2) P(B_3)=p^3$

calcolo di $P(B_1^c\cap B_2 \cap B_3)=(rbb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c\cap B_2 \cap B_3)= P(B_1^c) P(B_2) P(B_3)=p^2(1-p)$

calcolo di $P(B_1\cap B_2^c \cap B_3)=(brb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1\cap B_2^c \cap B_3)= P(B_1) P(B_2^c) P(B_3)= p^2 (1-p)$

calcolo di $P(B_1\cap B_2 \cap B_3^c)=(bbr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1\cap B_2 \cap B_3^c)= P(B_1) P(B_2) P(B_3^c)= p^2 (1-p)$

calcolo di $P(B_1^c\cap B_2^c \cap B_3)=(rrb)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c\cap B_2^c \cap B_3)= P(B_1^c) P(B_2^c) P(B_3)=p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1^c\cap B_2 \cap B_3^c)=(rbr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c\cap B_2^c \cap B_3)= P(B_1^c) P(B_2) P(B_3^c)= p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1\cap B_2^c \cap B_3^c)=(brr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1\cap B_2^c \cap B_3^c)= P(B_1) P(B_2^c) P(B_3^c)= p(1-p)^2$

calcolo di $P(B_1^c\cap B_2^c \cap B_3^c)=(rrr)/(b+r)^3$ da cui $P(B_1^c\cap B_2^c \cap B_3^c)= P(B_1^c) P(B_2^c) P(B_3^c)= (1-p)^3$

proseguendo si capisce che per calcolare $P(B^*_1\cap B^*_2 \cap B^*_3)$ basta contare il numero delle volte in cui $B^*_i=B_i$, e posto k questo numero, di modo che necessariamente nelle restanti volte (3-k) $B^*_i=B_i^c$ e si ha

$P(B^*_1\cap B^*_2 \cap B^*_3)=p^k (1-p)^{(3-k)}$

CASO n generico

Più in generale, per n estrazioni CON REISERIMENTO

si ha che, per $L\subseteq\{1,2,..,n\}$, e J il suo complemento, ossia $L \cup J =\{1,2,...n\}$ e $J=L^c$ (e quindi $|J|=n-|L|$)

$P((\cap_{\ell \text{ in } L} B_\ell) \cap (\cap_{j \text{ in } J} R_j)) = b^{|L|} r^{n-|L|} /(b+r)^n = (b/(b+r))^{|L|} . (r/(b+r))^{n-|L|}$

e quindi, posto $p=b/(b+r)$ (da cui $r/(b+r)=1-p$)

$P((\cap_{\ell \text{ in } L} B_\ell) \cap (\cap_{j \text{ in } J} R_j)) = p^{|L|} (1-p)^{n-|L|}$

e anche qui SE LA COMPOSIZIONE E' NOTA ALLORA gli eventi B_i sono indipendenti

Problema del calcolo della probabilità che il numero X^B_n di palline bianche estratte sia (esattamente) k

$P(X^B_n =k)= C^n_k b^k r^{n-k}/(b+r)^n= C^n_k (b/(b+r))^k (r/(b+r))^{n-k}$, per k=0,1, ... ,n-1, n

ossia $P(X^B_n =k) = C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$ per k=0,1, ... ,n-1, n

ATTENZIONE il fatto che la composizione è nota è fondamentale per l'indipendenza degli eventi B_i

ESEMPIO PARTICOLARE di: SE LA COMPOSIZIONE dell'urna non è nota GLI EVENTI B_i NON SONO INDIPENDENTI

nel caso di due estrazioni CON reinserimento di un'urna (sempre la stessa) scelta a caso fra due urne, con composizioni diverse, ad esempio 3 bianche e 3 rosse per la prima e 2 bianche e 4 rosse per la seconda. In questo caso

$P(B_1)=P(B_1|H_1)P(H_1)+ P(B_1|H_2)P(H_2)= P(B_2)=P(B_2|H_1)P(H_1)+ P(B_2|H_2)P(H_2)=$

$=(3/6)\ (1/2)+(2/6)(1/2)= 5/12,$

ma $P(B_1\cap B_2)=P(B_1\cap B_2|H_1)P(H_1)+ P(B_1\cap B_2|H_2)P(H_2)= =(3/6)^2\ (1/2) + (2/6)^2\ (1/2)=(9+4)/72=13/72$

e però $13/72=P(B_1\cap B_2) \neq P(B_1)\ P(B_2)= (\ 5/12)^2=25/144$ (cioè B_1 e B_2 NON sono INDIPENDENTI!!!)

(infatti si ha $13/72=26/144 > 25/144$)

14) mercoledì 27 marzo 2013

STESSO PROBLEMA CON TRE TIPI DI PALLINE (quindi multinomiale)

CENNI A PARTIZIONI INDIPENDENTI ossia il caso di estrazioni CON REINSERIMENTO da un'urna di COMPOSIZIONE NOTA, ma con più colori: ad esempio b palline bianche r rosse e g gialle

$P(\tilde{E}_1\cap \tilde{E}_2 \cap...\cap \tilde{E}_n)= P(\tilde{E}_1)\ P(\ \tilde{E}_2) ...\ P(\tilde{E}_n)$

dove

$\tilde{E}_k = B_k$ (B_k= k-sima pallina stratta BIANCA)

oppure

$\tilde{E}_k = R_k$ (R_k= k-sima pallina stratta ROSSA)

oppure

$\tilde{E}_k = G_k$ (G_k= k-sima pallina stratta GIALLA)

(ossia $\tilde{A}_k$ e' un elemento della partizione $\{B_k, R_k, G_k\}$ o addirittura dell'algebra generata dalla partizione $\{B_k, R_k, G_k\}$, ossia $\tilde{A}_k$ appartiene a $\{\emptyset, B_k, R_k, G_k, B_k \cup R_k, B_k \cup G_k, R_k \cup G_k\ ,\ \Omega\ \}$

Posto X_B il numero di palline estratte Bianche

X_R il numero di palline estratte Rosse

X_G il numero di palline estratte Gialle

calcolo di $P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3)$:

tale probabilità è positiva solo se k_i sono interi con $k_i\geq 0$, e $k_1+k_2+k_3=n$

e in tale caso sia ha, posto $p_B=b/(b+r+g)$, $p_R=r/(b+r+g)$, $p_G=g/(b+r+g)$

$P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3)= n!/(k_1!\ k_2!k_3!)\ p_B^{k_1}\ p_R^{k-2}\ p_G^{k_3}$,

Infatti tale evento è l'unione di eventi (disgiunti a due a due) del tipo

$(\cap_\{\ell \text{ in } L\}\ B_\ell) \cap (\cap_\{j \text{ in } J\}\ R_j) \cap (\cap_\{i \text{ in } I\}\ G_i)$, dove L, J e I sono sottoinsiemi di {1,..n} e formano una partizione di {1,..n} e con $|L|=k_1$, $|J|=k_2$ e $|I|=k_3$.

Tutti questi eventi hanno la stessa probabilità $p_B^{k_1}\ p_R^{k-2}\ p_G^{k_3}$ e sono tanti quanti gli anagrammi che si possono formare con k_1 lettere B, k_2 lettere R e k_3 lettere G.

OSSERVAZIONE il numero delle terne k_1, k_2 e k_3 per cui la probabilità è strettaemnte positiva, ossia il numero delle soluzioni di

$k_i\geq 0$, e $k_1+k_2+k_3=n$

si può calcolare e piu' in generale si trova che il numero delle soluzioni per cui

$k_i\geq 0$, e $k_1+k_2+...+k_r=n$

è uguale al numero delle COMBINAZIONI di n+r-1 elementi di classe r-1

Calcolo di $P(X_B=k)$:

ci si riduce al caso di un'urna con b palline Bianche e r+g NON bianche e quindi

$P(X_B=k)= C^n_k\ p_B^k\ (1-p_B)^{n-k}$

per k=0,1,...,n

Calcolo di $P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=k_3)$:

se $k_i\geq 0$, e $k_1+k_2 \leq n$

$P(X_B=k_1, X_R=k_2)=P(X_B=k_1, X_R=k_2, X_G=n-k_1-k_2)$

$=n!/(k_1!\ k_2!(n-k_1-k_2)!)\ p_B^{k_1}\ p_R^{k-2}\ p_G^{(k_1+k_2)}$

$=n!/(k_1!\ k_2!(n-k_1-k_2)!)\ p_B^{k_1}\ p_R^{k-2}\ (1- p_B -p_R)^{(k_1+k_2)}$

mentre vale 0 in tutti gli altri casi.

Svolto parte dell'Esercizio 3 del compito di aprile 2012 (I esonero)

SOLUZIONI SU TWIKI

http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=testo-e-soluzioni-scannerizzate-I-prova-in-itinere-aprile-2012-con_commenti.pdf

venerdì 29 marzo 2013 vacanze di PASQUA

lunedì 1 aprile 2013 vacanze di PASQUA

15) mercoledì 3 aprile 2013

Svolti gli Esercizi del compito di aprile 2012 (I esonero)

con domande aggiuntive ad esempio, in esercizio 3 aggiunta la domanda vi) gli eventi A e $D \cup E$ sono indipendenti?

in Esercizio 1 TRIS, FULL, POKER con un mazzo da 32 carte

e con estrazioni in blocco da un'urna con differenti colori

SOLUZIONI del compito SU TWIKI

http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=testo-e-soluzioni-scannerizzate-I-prova-in-itinere-aprile-2012-con_commenti.pdf

16) venerdì 5 aprile 2013

EVENTI CORRELATI POSITIVAMENTE e NEGATIVAMENTE definizione, proprietà ed esempi.

Definzione di due eventi correlati positivamente e correlati negativamente:
nel caso di eventi con probabilità positiva: A e B sono correlati positivamente se $P(A|B)>P(A)$
o equivalentemente $P(A \cap B) > P(A)P(B)$

Gli eventi A e B sono correlati negativamente se invece $P(A|B)<P(A)$ o equivalentemente $P(A \cap B) < P(A)P(B)$

(ATTENZIONE SU ALCUNI TESTI VIENE DATA LA DEFINIZIONE CON le disuguaglianze del tipo $P(A|B) \geq P(A)$
o equivalentemente $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$ invece che disuguaglianze strette)

Dimostrazione di alcune proprieta' relative: ad esempio se A e B sono correlati positivamente allora A e B^c (B complementare) sono correlati negativamente [e quindi A^c e B^c sono correlati positivamente].

ESEMPI tra cui: Estrazioni con reinserimento da un'urna di composizione incognita

Se H_i sono una partizione che rappresenta le possibili composizioni dell'urna (con palline di tipo A e B) e posto B_1 e B_2 rispettivamente " la prima pallina estratta è di tipo B" e " la seconda pallina estratta è di tipo B" si ha che

B_1 e B_2 sono correlati positivamente (o più in generale se B_1 e B_2 sono eventi condizionatamente indipendenti e con la stessa probabilità condizionata, ossia $P(B_1 \cap B_2|H_i)=P(B_1|H_i)P(B_2|H_i)$

Senza dimostrazione, ma solo constatato in un caso particolare, tuttavia diamo qui una dimostrazione, nel caso in cui

siano possibili solo due composizioni H_1 e H_2:

infatti

$P(B_1 \cap B_2)= P(B_1 \cap B_2 | H_1)P(H_1)+ P(B_1 \cap B_2 | H_2)P(H_2)=$*(per l'indipendenza condizionata)*

$= P(B_1|H_1)P(B_2|H_1)P(H_1)+ P(B_1|H_2)P(B_2|H_2)P(H_2)$

e

$P(B_1)= P(B_1|H_1)P(H_1)+ P(B_1|H_2)P(H_2)$

$P(B_2)= P(B_2|H_1)P(H_1)+ P(B_2|H_2)P(H_2)$

Dimostrare che

$P(B_1 \cap B_2) > P(B_1) P(B_2)$, *equivale a dimostrare che*

$(x_1)^2 t+ (x_2)^2(1-t) > (x_1 t + x_2 (1-t))^2$,

dove si è posto

$x_1:=P(B_1|H_1)=P(B_2|H_1)$, $x_2:=P(B_1|H_2)=P(B_2|H_2)$, *e* $t:=P(H_1)$ *per cui* $1-t:=P(H_2)$

la verifica di

$(x_1)^2 t+ (x_2)^2(1-t) > (x_1 t + x_2 (1-t))^2= (x_1)^2 t^2 + 2 t(1-t) x_1 x_2 + (1-t)^2(x_2)^2$

equivale a

$(x_1)^2(t-t^2) + (x_2)^2[1-t- (1-t)^2] - 2 t(1-t) x_1 x_2 >0$

Ossia (essendo $1-t- (1-t)^2=1-t-(1-2t+t^2)=t-t^2= t(1-t)$

$(x_1)^2t(1-t) + (x_2)^2t (1-t) - 2 t(1-t) x_1 x_2 = t (1-t) (x_1-x_2)^2 >0$

(che è sempre vera tranne, al minimo può valere 0, ma solo se $t=0$ *o* $t=1$ *(cioè* $P(H_1)=0$ *o* $P(H_2)=0$*, oppure se* $x_1=x_2$*,ma allora la composizione delle due urne sono, dal punto di vista probabilistico, identiche, ossia* $P(B_i|H_1)=P(B_i|H_2)$*).*

Svolti alcuni esercizi dal foglio di tutoraggio del 7 aprile 2010 (per matematici)

link: http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/compiti-CP1-2009-10/FOSCHI-Es_07_04-BIS.pdf

Esercizio 1. Se lanciamo un dado 4 volte, calcolare la probabilità che il 6 compaia
1. almeno una volta;
2. esattamente 2 volte;
3. almeno 3 volte.

Esercizio 2. Una professoressa assegna agli studenti 10 problemi, informandoli che l'esame consisterà in 5 di questi scelti a caso. Se uno studente è riuscito a risolverne 7, calcolare la probabilità che risponda esattamente a
1. esattamente a 5 dei problemi dell'esame;
2. almeno 4 dei problemi dell'esame.

Esercizio 3. In un test a risposta multipla, con 3 possibili risposte per ognuna delle 5 domande, calcolare la probabilit`a che uno studente risponda correttamente a 4 o più domande tentandole in maniera casuale.
Esercizio 4. Due squadre di scacchi sono formate rispettivamente da 8 e 9 giocatori. Da ognuna di esse, ne vengono selezionati in maniera casuale 4, per partecipare ad una gara. Le coppie vengono formate abbinando in maniera casuale ogni giocatore selezionato dalla prima squadra con un giocatore selezionato dalla seconda squadra. Rebecca ed Elisa fanno parte ognuna di una squadra. Calcolare la probabilità che
1. solo una tra Rebecca ed Elisa sia scelta per la gara;
2. entrambe siano scelte, ma non giochino una contro l'altra;
3. giochino una contro l'altra.
Esercizio 5. Supponiamo che la probabilità che un figlio sia maschio o femmina sia uguale.
Una coppia ha 5 figli; calcolare la probabilità che
1. tutti i figli siano dello stesso sesso;
2. i 3 maggiori siano maschi e le altre femmine;
3. vi siano esattamente 3 maschi;
4. i 2 maggiori siano femmine;
5. vi sia almeno una femmina.

Esercizio 6. Due fabbriche, A e B, producono radio. Ogni radio prodotta dalla fabbrica A è difettosa con probabilità 0,05, mentre ogni radio prodotta dalla fabbrica B è difettosa con probabilità 0,01. Supponiamo di aver acquistato due radio prodotte dalla stessa fabbrica, che può essere con uguale probabilità A o B. Se la prima radio `e difettosa, calcolare la probabilità che lo sia anche la seconda
(Soluzione dell' Esercizio 6 solo accennata).
Esercizio 7. Il 45% degli elettori di un comune si ritiene di centro, il 30% di sinistra e il 25% di destra. Nell'ultima elezione si sono recati a votare il 40% degli elettori di centro, il 50% di quelli di sinistra e il 60% di quelli di destra. Un elettore `e estratto a caso. Sapendo che ha votato nelle ultime elezioni, calcolare la probabilit`a che si tratti di un elettore
1. di centro;
2. di sinistra;
3. di destra.
Quale percentuale di elettori ha partecipato all'ultima elezione?
(Esercizio 7 non svolto)

17) lunedì 8 aprile 2013

STUDIO DEL COMPORTAMENTO LIMITE delle estrazioni senza reinserimento da un'urna con m_A palline di colore ARANCIONE e m_B di colore BLU, quando il numero M=m_A+m_B di palline nell'urna tende ad infinito, e la proporzione m_A/M delle palline di tipo A rimane invariata, ovvero quando m_A/M tende a p, con $p\in[0,1]$ (e quindi m_B/M)=(M-m_A)/M=1-m_A/M tende a 1-p)

Si ottiene che al LIMITE, la valutazione delle probabilità si comporta in modo molto simile alla valutazione delle probabilità nel caso di estrazioni con reinserimento.

PER CAPIRE l'idea iniziamo da un esempio:

Sia m_A=1 e m_B=3 e siano A_1, A_2 e A_3 gli eventi "prima estratta di tipo A (o arancione)", "seconda estratta di tipo A (o arancione)" e " terza estratta di titpo A (o arancione)" rispettivamente e, analogamente, B_1, B_2 e B_3 gli eventi "prima estratta di tipo B (o blu)", "seconda estratta di tipo B (o blu)" e " terza estratta di tipo B (o blu)" rispettivamente. Se indichiamo con P_{con} e P_{senza} le probabilità nel caso CON REINSERIMENTO e SENZA REINSERIMENTO, rispettivamente, ovviamente le probabilità P_{con} (B_i) e P_{senza} (B_i) sono uguali e valgono 3/4, mentre le probabilità degli eventi

P_{con} (B_1$\cap$ B_2$\cap$B_3)=(3/4)^3= 0,421875

e

P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3)= P_{senza} (B_1) P_{senza} (B_2|B_1) P_{senza} (B_3|B_1∩ B_2)=(3/4)(2/3)(1/2)=1/4=0,25

sono molto differenti.

Se però consideriamo un'urna che contiene **m_A=10 palline di tipo A (o arancione) e m_B=30 di tipo B (o blu)**

allora si ha ancora che P_{con} (B_i) =P_{senza} (B_i) = 30/40= 3/4, e P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3)=(3/4)^3= 0,421875

ma P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3)= P_{senza} (B_1) P_{senza} (B_2|B_1) P_{senza} (B_3|B_1∩ B_2)=(30/40)(29/39)(28/38)=
=0,4109311740890688259109311740890 7

I valori P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3) e P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3) sono ancora differenti, ma sono molto più vicini.

Se invece consideriamo un'urna che contiene **m_A=100 palline di tipo A (o arancione) e m_B=300 di tipo B (o blu)**

allora si ha ancora che P_{con} (B_i) =P_{senza} (B_i) = 300/400= 3/4, e P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3)=(3/4)^3= 0,421875

ma P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3)= P_{senza} (B_1) P_{senza} (B_2|B_1) P_{senza} (B_3|B_1∩ B_2)=(300/400)(299/399)(298/398)=
=0,4208164884573242150602637246382 3

I valori P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3) e P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3) sono ancora differenti, ma i valori sono decisamente molto più vicini e sono uguali fino alla seconda cifra decimale.

Se poi consideriamo un'urna che contiene **m_A=1000 palline di tipo A (o arancione) e m_B=3000 di tipo B (o blu)**

allora si ha ancora che P_{con} (B_i) =P_{senza} (B_i) = 3000/4000= 3/4, e P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3)=(3/4)^3= 0,421875

ma P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3)= P_{senza} (B_1) P_{senza} (B_2|B_1) P_{senza} (B_3|B_1∩B_2)=(3000/4000)(2999/3999)(2998/3998)=
=0,4217694931486748625625641027 5655

I valori P_{con} (B_1∩ B_2∩B_3) e P_{senza} (B_1∩ B_2∩B_3) sono ancora differenti, ma sono uguali fino alla terza cifra decimale.

Più in generale si può vedere che

P_{senza} (A_1∩ B_2∩B_3∩A_4∩B_5∩B_6∩A_7)=

=(m_A/M) [m_B/(M-1)] [(m_B-1)/(M-2)] [(m_A-1)/(M-3)] [(m_B-2)/(M-4)] [(m_B-3)/(M-5)] [(m_A-2)/(M-6)]

ossia un prodotto di 7 fattori di cui quattro del tipo [(m_B-i)/(M-j)] e tre del tipo [(m_A-h)/(M-k)]

ora [(m_A-h)/(M-k)]= [(m_A/M-h/M)/(1-k/M)] che tende a p quando M tende all'infinito

mentre

[(m_B-i)/(M-j)]= [(m_B/M-i/M)/(1-j/M)] tende a 1-p

e quindi P_{senza} (A_1∩ B_2∩B_3∩A_4∩B_5∩B_6∩A_7) tende a p^3 (1-p)^4

Più in generale si ha che se si considera il numero n delle estrazioni fissato, mentre M, m_A ed m_B che tendono ad infinito con m_A/M =p (o che tende a p) e quindi m_B/M=1-p (o che tende a 1-p) si ha che, posto X_A il numero di palline estratte di tipo A, per ogni k=0,1,…n

P(X_A=k) tende a C^n_kp^k $(1-p)^{n-k}$ (quindi a probabilità binomiali, come se fossero estrazioni senza reinserimento)

(per coloro interessati alla dimostrazione, si vedano, ad esempio, gli appunti
http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/CPE-appunti/Spizzichino-Nappo-CP1-versione-7giugno-2011.pdf

pagine 60 e 61)

Questa osservazione permette di capire perché, spesso nei sondaggi, in cui si chiedono le opinioni di circa un migliaio di persone in rappresentanza di una popolazione di molti milioni di persone, si usa uno schema di estrazioni con reinserimento, invece che quello più corretto, ma meno semplice delle estrazioni senza reinserimento.

Si segnala a questo proposito il file "Caccia all'errore",

link sulla pagina web del corso di Probabilità 1 (per Matematici) a.a. 2009-10:

http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/compiti-CP1-2009-10/IMBROGLI_AL_LOTTO.html

dove un chimico, abituato a trattare le estrazioni con e senza reinserimento nello stesso modo, lo fa anche trattando il gioco del lotto *(l'articolo è tratto da un articolo del Giornale La repubblica del **13 ottobre 1996** - http://ricerca.repubblica.it/repubblica/archivio/repubblica/1996/10/13/perche-al-lotto-si-puo-solo-perdere.html)*

(Attenzione nel lavoro di un chimico questa "confusione" è lecita, perché i chimici si occupano di reazioni chimiche dove le palline sono atomi e una reazione avviene se si "incontrano" gli atomi giusti: sostanzialmente se si estraggono le palline del colore giusto, ad esempio per fare una molecola di acqua si devono incontrare due atomi di idrogeno e uno di ossigeno. Se si trattasse questo problema come l'estrazione di tre palline da un'urna che ne contiene N di cui N_H di idrogeno, N_O di ossigeno (sia che N=N_H+N_O o che sia maggiore, ossia nel caso ci siano anche altri atomi e quindi N>N_H+N_O) tale probabilità vale 3 N_O N_H (N_H-1)/[N(N-1) (N-2]), ma il numero di atomi presenti è enorme, dell'ordine del numero di Avogadro ossia 10^{23} e quindi la differenza con 3 (N_O/N) $(N_H/N)^2$ è piccolissima)

Svolti alcuni esercizi dal foglio di tutoraggio del 16 marzo 2010 (per matematici)

link: http://www.mat.uniroma1.it/people/nappo/compiti-CP1-2009-10/FOSCHI-Es_16_03.pdf

Esercizio 1. Si fanno n lanci di una moneta perfetta. Per 1 _ h _ n, calcolare la probabilità di ottenere il risultato testa
1. all'h-esimo lancio;
2. per la prima volta all'h-esimo lancio.

Generallizzazione della domanda 2. al caso in cui la moneta non fosse perfetta, e posto A_h="all'h-simo lancio esce testa" e supposto che P(A_h)=p e che gli eventi A_h formano una famiglia di eventi stocasticamente indipendenti
RISPOSTA: Si ha che l'evento "la prima volta che esce testa è l'h-sima"= $(A_1)^c$∩ $(A_2)^c$ ∩…$(A_(h-1))^c$ ∩A_h

e quindi

$P((A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \ldots (A_{(h-1)})^c \cap A_h) = P(A_1)^c \; P((A_2)^c) \cdots P(A_{(h-1)})^c) \; P(A_h) = (1-p)^{h-1} p$

Esercizio 2. Siano A; B eventi tali che $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) = 1/3$.

a) Quanto vale $P(A) + P(B)$?

b) Qual è il valore massimo che può assumere $P(A)$?

c) Qual è il valore minimo che può assumere $P(A)$?

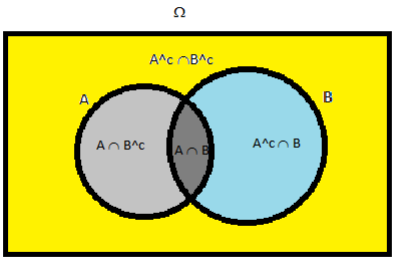
d) Quanto vale $P(A^c \cap B^c)$?

e) Quanto vale $P(A^c \cup B^c)$?

f) Imponendo $P(A) = P(B)$, quanto vale $P(A)$?

SUGGERIMENTI: $P(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ e quindi $P(A)+P(B)= P(A\cup B)+P(A\cap B)$,

$P(A \cap B)=1/3$, $P(A \cap B^c)=a$, $P(A^c \cap B)=b=2/3-a$, $P(A^c \cap B^c)=P((A\cup B)^c)=0$, $P(A^c \cup B^c)= P((A \cap B)^c)$



Esercizio 3. Un numero di telefono di 6 cifre viene composto digitando a caso sulla tastiera (10 tasti). Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

a) il numero composto è 121212 o 094816;

b) il numero composto non contiene il 6;

c) il numero composto contiene solo cifre pari;

d) il numero composto contiene la stringa 2345;

e) il numero composto contiene la stringa 2222.

a) $P_a=2/10^6$, b) $p_b=9^6/10^6$ c) (consideriamo 0 come numero pari) $p_c= 5^6/10^6$

d) i casi favorevoli son del tipo 2345* *, dove * significa una cifra qualunque (e sono 10^2) oppure *2345* (e sono 10^2) oppure 2345** (e sono 10^2) quindi $p_d= 3\ 10^2/10^6= 3 /10^4$

e) posto A_1 l'evento "le prime 4 cifre sono tutte 2" (ossia del tipo 2222**)
A_2="le cifre dalla seconda alla quinta sono tutte2" (ossia del tipo *2222*)
e A_3="le ultime 4 cifre sono tutte 2" (ossia del tipo **2222)
si ha
$p_e=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$=(formula di inclusione ed esclusione)
$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1\cap A_3) -P(A_2 \cap A_3)+P(A_1 \cap A_2\cap A_3)$

Poiché $A_1 \cap A_2$= "le prime 5 cifre tutte uguali a 2" (ossia 22222*),
$A_1\cap A_3 = A_1 \cap A_2\cap A_3$ = "tutte le cifre uguali a 2" (ossia 22222)
($A_2 \cap A_3$ = "le ultime cinque cifre tutte uguali a 2" (ossia *22222)
$p_d=3\ (10^2/10^6) - 2\ (10/10^6)=28/10^5$

SOLUZIONE ALTERNATIVA

Posto "o" per una cifra diversa da 2, i casi favorevoli sono del tipo
2222oo (e sono 9^2) oppure o2222o (e sono 9^2) oppure oo2222 (e sono 9^2)
22222o (e sono 9) oppure o22222 (e sono 9) oppure 222222 (ed è 1 sola)

INOLTRE ci sono anche quelle del tipo
222202 (e sono 9) oppure 2o2222 (e sono 9)

In totale i casi favorevoli sono 3* 81+4*9+1=243+36+1=280

Quindi $p_d= 280/10^6=28/10^5$.

Esercizio 4. Uno studente possiede 4 libri di algebra, 7 di calcolo/analisi e 5 di geometria. I libri vengono disposti a caso su uno scaffale. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
a) il primo libro a sinistra è di geometria e il secondo di algebra;
b) i libri di ogni materia sono contigui;
c) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico, ma non necessariamente contigui;
d) i libri di ogni materia sono in ordine alfabetico e contigui.

I casi possibili son 16! infatti possiamo indicare

con A_1, A_2, A_3, A_4, i quattro libri di Algebra, in ordine alfabetico,

con C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, i sette libri di Calcolo/Analisi, in ordine alfabetico e infine

con G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, i cinque libri di Geometria, in ordine alfabetico.

a) casi favorevoli: 5*4*14! Quindi p_a=(5/16)(4/15)

b) i casi possibili sono del tipo

A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} ,C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, oppure

A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} , G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, oppure

C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} ,G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, oppure

C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} , oppure

G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} ,C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, oppure

G_{h1}, G_{h2}, G_{h3}, G_{h4}, G_{h5}, C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, C_{k5}, C_{k5}, C_{k7}, A_{j1}, A_{j2}, A_{j3}, A_{j4} ,

e sono 3! 4! 7! 5!

Quindi p_b= (3! 4! 7! 5!) /16!

c) I casi favorevoli sono tanti quanti gli anagrammi possibili con quattro A, sette C e cinque G

Ad esempio all'anagramma GCACGAACCCGGAGCC corrisponde il seguent ordinamento nello scaffale $G_1C_1A_1C_2G_2A_2A_3C_3C_4C_5G_3G_4A_4G_5C_6C_7$ ossia 16!/(4! 7! 5!) e quindi

p_c=[16!/(4! 7! 5!)]/16! = 1/(4! 7! 5!)

d) I casi favorevoli sono solo 3! Quante le permutazioni degli elementi (a,c,g) e quindi

p_d=3!/16!

ed esattamente i sei casi favorevoli sono

A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,

A_1, A_2, A_3, A_4, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,A_1, A_2, A_3, A_4, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, A_1, A_2, A_3, A_4,

G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,

G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7,A_1, A_2, A_3, A_4,

18) mercoledì 10 aprile 2013

Svolti alcuni esercizi del compito di esonero di aprile 2011 per matematici

SOLUZIONI su TWIKI http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=soluzioni-esonero1-aprile-2011-Matematici.pdf

19) venerdì 12 aprile 2013

Numero di successi du n prove indipendenti, Eventi condizionatamente indipendenti, rispetto a una partizione,

Svolti alcuni esercizi .

settimana dal 15 al 19 aprile PROVE IN ITINERE

lunedì 15 aprile 2013

mercoledì 17 aprile 2013 (I prova in itinere) orario 14,15-17,15

venerdì 19 aprile 2013

20) lunedì 22 aprile 2013

Correzione degli esercizi della prova in itinere

21) mercoledì 24 aprile 2013

Introduzione alle variabili aleatorie, definizione ed esempi.

Caso delle variabili aleatorie discrete; definizione di densità discreta di una variabile aleatoria.

DEFINIZIONE DI VARIABILE ALEATORIA DISCRETA, in spazi di probabilità finiti.

In uno spazio di probabilità FINITO $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ ed $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$,

una funzione $X: \Omega \to IR$, $\omega_i \to X(\omega_i)$

è una variabile aleatoria DISCRETA , [in quanto $X(\Omega)$ è finito], ossia

$X(\Omega) =\{x_k$, per $k=1,2,....n\}$.

NOTA BENE per indicare le variabili aleatorie si usano di solitole lettere MAIUSCOLE X,Y,Z, U,V,W, R,S,T, (nella parte finale dell'alfabeto, ma a volta anche L, M, N), mentre di solito le lettere MAIUSCOLE A,B,C,D,E, F, G, H si

usano per gli eventi (ovviamente a volte si deroga da questa convenzione, ma l'importante e' dichiarare all'inizio, se una lettera indica un evento o una variabile aleatoria)

Si definisce DENSITA' DISCRETA DI X la funzione

p: $X(\Omega) \to IR^+$, x_i $p_X(x_k):=P(X=x_k)$

Una densità discreta è caratterizzata dalle seguenti proprietà

per ogni k=1,...n, $p_X(x_k) \geq 0$ [in realtà appartiene a [0,1]]

e $\sum_{k=1,..n} p_X(x_k)=1$

PIU' IN GENERALE SI DEFINISCE UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA (anche se Ω non è finito)

una funzione $X: \Omega \to IR$, $\omega \to X(\omega)$, con $X(\Omega)$ finito o numerabile

ossia $X(\Omega) =\{x_k$, per k=1,2,....n} oppure $X(\Omega) =\{x_k$, per k=1,2,....n,....}

e con $\{X=x_k\}$ un evento, per cui ha senso calcolare $P(X=x_k)$.

e la densità discreta di X si definisce in modo del tutto analogo.

Esempi di calcolo della densità discreta:

ESEMPIO 1

a partire dal lancio di due dadi equilibrati,

X_1= punteggio del primo dado e X_2= punteggio del secondo dado

X=X_1+X_2 (punteggio totale ottenuto)

Y=max(X_1,X_2) (punteggio massimo)

Z=min(X_1,X_2) (punteggio minimo)

ESEMPIO 2 (dal Ross)

Da un'urna che contiene 3 palline blu, 3 rosse e 5 gialle, si estraggono (senza reinserimento) tre palline. Assumendo che si ottiene +1 per ogni pallina blu estratta, -1 per ogni pallina rossa estratta e 0 per ogni pallina gialla estratta, sia X il punteggio ottenuto.

Soluzione: i valori che la variabile aleatoria può assumere sono -3, -2, -1, 0, +1,+2,+3

Dobbiamo individuare gli eventi del tipo {X=i}, per i=-3, -2, -1, 0, +1,+2,+3

{X=+3}={vengono estratte tre palline blu}

{X= -3}={vengono estratte tre palline rosse}

{X= +2}={vengono estratte due palline blu e una gialla}

{X= -2}={vengono estratte due palline rosse e una gialla}

{X=+1}={vengono estratte due palline blu e una rossa, OPPURE vengono estratte una pallina blu e due gialle}

{X=-1}={vengono estratte due palline rosse e una blu OPPURE vengono estratte una pallina rossa e due gialle}

{X=0}={vengono estratte una pallina blu una rossa e una gialla, OPPURE vengono estratte tre palline gialle}

p_X(+3)= P({X=+3}) [ma di solito si scrive P(X=3)]= C^3_3 C^3_0 C^5_0/C^11_3 =1/(11 10 9/3 2)=1/165

p_X(-3)= P({X=-3}) [ma di solito si scrive P(X=-3)]= C^3_0 C^3_3 C^5_0/C^11_3 =1/(11 10 9/3 2)=1/165

p_X(+2)= P({X=+2})= C^3_2 C^3_0 C^5_1/C^11_3 =(3 5)/(11 10 9/3 2)=15/165

p_X(-2)= P({X=-2}) = C^3_0 C^3_2C^5_1/C^11_3 =(3 5)/(11 10 9/3 2)=15/165

p_X(+1)= P({X=+1}) = C^3_2 C^3_1 C^5_0/C^11_3 + C^3_1 C^3_0 C^5_2/C^11_3 =(9+30)/(11 10 9/3 2)=39/165

p_X(-1)= P({X=-1}) = C^3_1 C^3_2 C^5_0/C^11_3 + C^3_0 C^3_1 C^5_2/C^11_3 =(9+30)/(11 10 9/3 2)=39/165

Per calcolare p_X(0) possiamo procedure in due modi:

p_X(0)= P({X=-0}) = 1 – [p_X(+1)+p_X(-1)+ p_X(+2)+p_X(-2)+ p_X(+3)+p_X(-3)]= 1- 2((1+15+39)|165=(165-110)|165

oppure, come per gli altri casi

p_X(0)= P({X=-0}) = C^3_1 C^3_1 C^5_1/C^11_3 + C^3_0 C^3_0 C^5_3/C^11_3 =(45+10)/(11 10 9/3 2)=55/165

ESEMPIO 3

Se la composizione dell'urna è la stessa dell'esempio 3,ma si fanno 4 estrazioni CON REINSERIMENTO e Y è il numero delle palline blu estratte si ha

p_Y(k)=C^4_k (3/11)^k (1-3/11)^{4-k}, per k=0,1,2,3,4

ATTENZIONE

questo è un esempio di variabile aleatoria di tipo BINOMIALE ed esattamente Binomiale di parametri n=4 e p=3/11

(si dice anche che Y ha distribuzione Binomiale)

INOLTRE E' FONDAMENTALE INDICARE ANCHE QUALI SONO I VALORI che la variabile aleatoria assume

INFATTI

ESEMPIO 4

Se la composizione dell'urna è la stessa dell'esempio 3,ma si fanno 4 estrazioni SENZA REINSERIMENTO e Z è il numero delle palline blu estratte la risposta

p_Z(k)=P(Z=k)=C^3_k C^8_(4-k)

NON E' SUFFICIENTE, bisogna specificare per quali valori è strettamente positiva

ATTENZIONE LA RISPOSTA

p_Z(k)=C^3_k C^8_(4-k) per k=0,1,2,3,4

E' SBAGLIATA perché ovviamente non è possibile ottenere 4 palline blu estraendo senza reinserimento da un'urna che contiene SOLO 3 palline blu

LA RISPOSTA GIUSTA e'

p_Z(k)=P(Z=k)=C^3_k C^8_(4-k) per k=0,1,2,3,

ATTENZIONE Il caso precedente è un caso particolare di variabile aleatoria di tipo IPERGEOMETRICO

(si dice anche che Z ha distribuzione Ipergeometrica)

22) venerdì 26 aprile 2013

RIEPILOGO sui più importanti tipi di variabili aleatorie:

Definizione di variabili aleatorie DISCRETA Uniformi (la densità di probabilità è costante), ossia $p_X(x_k)=c$ per ogni x_k in $X(\Omega)$

OSSERVAZIONE: Le variabili aleatorie discrete uniformi hanno senso SOLO se $X(\Omega)$ è finito, e allora, posto $n=|X(\Omega)|$

si ha $c=1/n$, poiché $p_X(x_k)=c\geq 0$ e $\sum_{k=1,..n} p_X(x_k)=1$, si ha $\sum_{k=1,..n} p_X(x_k)=\sum_{k=1,..n} c= nc=1$.

Variabili aleatorie Binomiali, Variabili aleatorie Ipergeometriche.

Variabile di Poisson : si dice che X ha distribuzione di POISSON di parametro $\lambda>0$, e si scrive $X\sim POISS(\lambda)$

se e solo se $X(\Omega)=IN=\{0,1,2,.....\}$

e

$p_X(k)=P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ per $k\in IN$.

NELLA PROSSIMA LEZIONE SI VEDRA' COME NASCE NATURALMENTE COME APPROSSIMAZIONE DELLE VARIABILI ALEATORIE BINOMIALI BIN(n,p), con n grande e p piccolo.

Variabile aleatoria Geometrica: sia $p \in (0,1)$; si dice che X ha distribuzione Geometrica di parametro p e si scrive

X~ GEOM(p) se e solo se $X(\Omega)=IN\setminus\{0\}=\{1,2,.....\}$

e

$p_X(k)=P(X=k) =(1-p)^k p$, per $k\geq 1$.

IL PROTOTIPO di variabile aleatoria Geometrica è il tempo di primo successo in un numero illimitato di prove globalmente indipendenti (si tratta di una successione di eventi A_k, per $k\geq 1$,[OSSIA che, comunque prendo un numero finito di eventi, questi formano una famiglia finita di eventi globalmente indipendenti)] e tutti CON LA STESSA PORBABILITA', ossia P(A_k)=p per ogni $k\geq 1$:

$\{X=1\}= A_1$ $P(X=1)=P(A_1)=p$

$\{X=2\}=A_1^c \cap A_2$ $P(\{X=2\})=P(A_1^c \cap A_2)= P(A_1^c) P(A_2)=(1-p) p$

$\{X=3\}=A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ $P(\{X=3\})=P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)=P(A_1^c) P(A_2^c)P(A_3)=(1-p)^2 p$

.....

$\{X=k\}=A_1^c \cap....\cap A_{k-1}^c \cap A_k$

$P(\{X=k\})=P(A_1^c\cap.... \cap A_{k-1}^c \cap A_k)=P(A_1^c).... P(A_{k-1}^c)P(A_k)=(1-p)^{k.-1}p$

PROPRIETA' DI MANCANZA DI MEMORIA delle v.a. GEOMETRICHE

(ossia perché i ritardi del lotto non ci danno nessuna informazione utile...)

per ogni $h,k\geq 1$: $P(X=k+h|X>k) = P(X=h)$ come a dire, se non ho avuto nessun successo nelle prime k prove, la probabilità che debba aspettare altre h prove per il primo successo è la stessa qualunque sia k, ossia è come ricominciare da capo, INFATTI

$P(X=k+h|X>k)=P(X=k+h, X>k)/P(X>k)= P(X=k+h)/P(X>k)= (1-p)^{k+h.-1}p /(1-p)^{k.-1}p= (1-p)^{h.-1}p= P(X=h)$.

Cenni alle Variabili continue.

23) lunedì 29 aprile 2013

Teorema di APPROSSIMAZIONE DI POISSON, CON DIMOSTRAZIONE ED esempio di applicazione

ENUNCIATO (del TEOREMA DI POISSON)

Siano $X_{(n)}$ variabili aleatorie Bin (n, $p_{(n)}$), con $p_{(n)}= \lambda/n$, dove $\lambda>0$ *[ed n è tale che $\lambda/n<1$, ossia $n> \lambda$]*

Allora, per ogni k=0,1,....

$\lim_{n\to\infty} P(X_{(n)} =k) = e^{-\lambda} \lambda^k/ k!$

DIM: per k fissato ed n maggiore di k si ha

$P(X_{(n)} =k)= C^n_k (p_{(n)})^k (1- p_{(n)})^{n-k} = [n(n-1) ... (n-(k-1))]/ k!] (\lambda/n)^k (1-\lambda/n)^{n-k}$

$= [\lambda^k / k!] (1-\lambda/n)^n (1-\lambda/n)^{-k} [n(n-1) ... (n-(k-1))]/ n^k$

Tenendo conto che

(i) $(1+x/n)^n$ converge ad e^x, per ogni x reale, e quindi $(1-\lambda/n)^n$ converge ad $e^{-\lambda}$

(ii) che, essendo k fissato, $(1-\lambda/n)^{-k}$ converge ad 1

(iii) che $[n(n-1) ... (n-(k-1))]/ n^k = [n/n] [(n-1)/n] ... [(n-(k-1))/ n]$ converge ad 1 (per j fissato (n-j)/n converge ad 1)

Si ottiene che $P(X_{(n)} =k) = [\lambda^k / k!] (1-\lambda/n)^n (1-\lambda/n)^{-k} [n(n-1) ... (n-(k-1))]/ n^k$ converge a $e^{-\lambda} \lambda^k/ k!$

APPROSSIMAZIONE DI POISSON: esempio di uso per il calcolo approssimato di probabilità relative a una variabile aleatoria $X_{(n)}$ di legge/distribuzione Bin (n,p) con n molto grande e p piccolo.

La probabilità $P(X_{(n)}=k) \cong e^{-\lambda} \lambda^k/ k!$ con $\lambda=np$, ossia con $E(X)=E(X_{(n)})$

SIGNIFICATO:

Se X è una v.a. di tipo Bin (n, p), con n "GRANDE" e p"piccolo" allora

P(X =k) si approssima con $e^{-\lambda} \lambda^k/ k!$ dove $\lambda = np$

L'approssimazione è buona per valori non troppo grandi di k e solo se $\lambda = np$ non è troppo grande

(in genere è bene utilizzare questa approssimazione solo nel caso in cui $\lambda = np$ sia minore di 10 e n maggiore di 100,

oppure se $p \leq 0.05$ e $n \geq 20$)

ESEMPIO di APPLICAZIONE: E' noto che nei PC della marca XX, l'1% presenta dei difetti di fabbricazione.

Si supponga che ogni PC sia difettoso indipendentemente l'uno dall'altro.

Si prendono 200 PC. Posto X il numero dei PC difettosi

1) Trovare un'espressione per $P (X \leq 5)$

2) Trovare un valore approssimato per $P(X \leq 5)$

SOLUZIONE

1) Poiché supponiamo gli eventi "i-simo PC difettoso" globalmente indipendenti e tutti con la stessa probabilità p=1%=1/100, la variabile aleatoria X è una variabile aleatoria Binomiale di parametri n=200 e p=1/100

(in simboli X ~ Bin(200,1/100)), quindi

$P(X\leq 5)= \sum_{k=0,1,\dots 5} P(X=k)= \sum_{k=0,1,\dots,5} C^5_{_k} (1/100)^k (99/100)^{200-k}$

2) visto che n=200 è "GRANDE" e p=1/100 è "piccola", tenendo conto dell'approssimazione di Poisson, è possibile trovare un'espressione approssimata per

$P(X\leq 5)= \sum_{k=0,1,\dots 5} P(X=k)$.

QUINDI, posto λ=np=200(1/100)=2

$P(X\leq 5)= \sum_{k=0,1,\dots,5} P(X=k) \cong \sum_{k=0,1,..,5} e^{-\lambda} \lambda^k/ k! = e^{-2} \sum_{k=0,1,..,5} 2^k/ k! = e^{-2} [1+ 2^1/ 1!+ 2^2/ 2!+ 2^3/ 3! +2^4/ 4!+ 2^5/ 5!]$

$= e^{-2} [1+ 2+ 2+ 4/3 +2/3+ 4/15]= e^{-2} [5+ 6/ 3 + 4/15]= e^{-2} [7 + 4/15] = e^{-2} 109/15 \cong 0,983$

L'espressione approssimata è più semplice dell'espressione "giusta, e possiamo affermare che la probabilità di avere al più 5 PC difettosi tra 200 PC è circa il 98%.

DEFINIZIONE GENERALE DI VARIABILE ALEATORIA

In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una funzione $X: \Omega \to IR$, $\omega \to X(\omega)$

è una variabile aleatoria se per ogni $x \in IR$, l'insieme

$\{X\leq x\}=\{\omega \in \Omega$ tali che $X(\omega)\leq x\}$

è un evento, ossia appartiene a $\mathcal{F}$.

NOTA BENE: poiché PER IPOTESI $\{X\leq x\}\in \mathcal{F}$, ha senso calcolare $P(X \leq x)$.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE O DI RIPARTIZIONE

$F_X: IR \to [01]$, $x \to F_X(x):=P(X\leq x)$

ossia F_X è la funzione definita da $F_X(x):=P(X\leq x)$

OSSERVAZIONE se la funzione di distribuzione è nota

$P(a<X\leq b)=F_X(b) - F_X(a)$

come segue subito osservando che

$F_X(b) - F_X(a) = P(X \le b) - P(X \le a)$ e che $P(X \le a) + P(a<X\le b) = P(X \le b)$.

Si ha che, se X è discreta, con densità discreta $p_X(x_k)=P(X=x_k)$ allora

$F_X(x)=\sum_{k\ge 1 \text{ tali che } x(k)\le x} p_X(x_k) = \sum_{k\ge 1 \text{ tali che } x(k)\le x} P(X=x_k)$ (NB qui per semplicità di notazione scriviamo x(k)=x_k)

mentre se X è assolutamente continua, con densità f, allora

$F(x)=F_X(x)= \int_{(-\infty,x]} f(y)\, dy$

CALCOLO DELLA DENSITA' DISCRETA PER LE VARIABILI ALEATORIE: T_1 = TEMPO DI PRIMO SUCCESSO, T_2= TEMPO DI SECONDO SUCCESSO, T_3= TEMPO DI TERZO SUCCESSO, ETC... in una successione di eventi globalmente indipendenti $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ e tutti con la stessa probabilità: $P(A_i)=p$, i=1,2,..,n, n+1,.....

$\{T_1=k\}= (A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \ldots \cap (A_{k-1})^c \cap A_k = \{S_{k-1} =0\} \cap A_k$ per k=1,2,...

e quindi

$P(\{T_1=k\}) = P(A_1)^c \cap (A_2)^c \cap \ldots \cap (A_{k-1})^c \cap A_k) =$

$= P((A_1)^c)\ P((A_2)^c) \ldots P((A_{k-1})^c) P(A_k)= (1-p)^{k-1}\, p$ per k=1,2,...

più in generale, per $k \ge n$

$P(T_n=k)= P(\{S_{k-1} =n-1\} \cap A_k)= P(\{S_{k-1} =n-1\})P(A_k)= C^{k-1}_{n-1}\, p^{n-1}\, (1-p)^{n-1-(k-1)}\, p =$

$= C^{k-1}_{n-1}\, p^n\, (1-p)^{n-k}$

(FORSE A LEZIONE FATTO IN MODO LEGGERMENTE DIVERSO)

mercoledì 1 maggio 2013 (festa)

24) venerdì 3 maggio 2013

VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE: DENSITA' DI PROBABILITA' E FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E RELAZIONI TRA LORO

DEFINIZIONE di variabile aleatoria (assolutamente) continua

Una variabile aleatoria si dice (assolutamente) continua se esiste una funzione $f(x)=f_X(x)$

con $f(x) \ge 0$ per ogni x reale

e con

$\int_{(-\infty,+\infty)} f(x)\,dx = 1$

per la quale

$F_X(x)= \int_{(-\infty,x]} f(y)\,dy$

e quindi, equivalentemente,

qualunque siano a<b

$P(a<X\leq b)= \int_{(a,b]} f(x)\,dx = F_X(b)-F_X(a)$

Si osservi che per variabili aleatorie assolutamente continue, la probabilità che X appartenga ad un intervallo di estremi a e b non cambia se l'intervallo e' aperto o chiuso e più precisamente

$P(a<X\leq b)= \int_{(a,b]} f(x)\,dx = P(a\leq X\leq b)= \int_{[a,b]} f(x)\,dx = P(a<X<b)= \int_{(a,b)} f(x)\,dx = P(a\leq X<b)= \int_{[a,b)} f(x)\,dx$

RELAZIONE TRA $F=F_X$ e f.

f(x)=(d/dx)F(x), in quasi ogni punto. ATTENZIONE NON E' DERIVABILE OVUNQUE: ad esempio nei punti in cui f(x) è discontinua F non è derivabile.

MA ATTENZIONE se F è derivabile in quasi ogni punto, NON E' DETTO che la sua derivata sia una densità.

OSSERVAZIONE: ANALOGIA CON IL CASO DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Ricordiamo che, se X è discreta, con densità discreta $p_X(x_k)=P(X=x_k)$ allora

$F(x)=\sum_{k\geq 1 \text{ tali che } x(k)\leq x} p_X(x_k) = \sum_{k\geq 1 \text{ tali che } x(k)\leq x} P(X=x_k)$ (NB qui per semplicità di notazione scriviamo x(k)=x_k)

mentre se X è assolutamente continua, con densità di probabilità f(x)

$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(y)\,dy$

ESEMPI:

VARIABILI ALEATORIE UNIFORMI in un intervallo (a,b) E VARIABILI ALEATORIE ESPONENZIALI di parametro $\lambda>0$.

DA COMPLETARE

VALORE ATTESO prima definizione

DUE DEFINIZONI PER IL CASO DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

DEFINIZIONE NEL CASO SPAZIO DEGLI EVENTI FINITO:

Sia $(\Omega, \mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega), P)$ uno spazio di probabilità finito ossia Sia $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ un insieme FINITO ($N<\infty$)

Sia

$X: \Omega \to X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq IR$; $\omega_i \to X(\omega_i)$

una variabile aleatoria.

Si definisce valore atteso (è detto anche valore medio, speranza matematica, aspettazione)

$E(X):= \sum_{i=1,\ldots,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\}$

DEFINIZIONE PER VARIABILI ALEATORIE DISCRETE:

CASO $X(\Omega)$ FINITO

se X è una variabile aleatoria discreta a valori in $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq IR$, con densità discreta $p_X(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$.

(NOTA BENE non si assume che Ω sia un insieme finito)

si definisce

$E(X):= \sum_{k=1,\ldots,n} x_k p_X(x_k)$

CASO $X(\Omega)$ INFINITO

Se invece X è una variabile aleatoria discreta a valori in $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subseteq IR$, con densità discreta $p_X(x_k)$, $k=1,2,\ldots,n, n+1,\ldots$

(NOTA BENE: **non** si assume che Ω sia un insieme finito)

si definisce

$E(X):= \sum_{k\geq 1} x_k p_X(x_k)$,

purché la serie converge assolutamente, ossia SOLO SE

$E(|X|):= \sum_{k\geq 1} |x_k| p_X(x_k) <\infty$.

IMPORTANTE: le due definizioni sono equivalenti nel caso in cui Ω sia un insieme finito.

ESEMPIO $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $P\{\omega_i\}=1/5$ per ogni i=1,2,3,4,5.

$X: \Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \rightarrow X(\Omega)=\{0,1,2\} \subseteq IR$;

$\omega_1 \rightarrow X(\omega_1)= 2$; $\omega_2 \rightarrow X(\omega_2)=0$, $\omega_3 \rightarrow X(\omega_3)=1$, $\omega_4 \rightarrow X(\omega_4)=1$, $\omega_5 \rightarrow X(\omega_5)=2$

Secondo la definizione 1

$E(X)= \sum_{i=1,...,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\}=$

$= X(\omega_1) P\{\omega_1\} + X(\omega_2) P\{\omega_2\}+ X(\omega_3) P\{\omega_3\} + X(\omega_4) P\{\omega_4\}+ X(\omega_5) P\{\omega_5\}=$

$= 2 (1/5) + 0 (1/5) + 1 (1/5) + 1 (1/5) +2 (1/5)=6/5$

SI OSSERVI CHE 6/5 NON E' UN VALORE ASSUNTO DALLA VARIABILE ALEATORIA X

Inoltre la sua densità discreta vale

$p_X(0)=P(X=0)= P\{\omega_i \text{ tali che } X(\omega_i)=0\}= P\{\omega_2\}$, $p_X(1)=P(X=1)= P\{\omega_i \text{ tali che } X(\omega_i)=1\}= P\{\omega_3\}+ P\{\omega_4\}$,

$p_X(2)=P(X=2)= P\{\omega_i \text{ tali che } X(\omega_i)=2\}= P\{\omega_1\}+ P\{\omega_5\}$,

e quindi

$E(X):= 0\, p_X(0)+ 1p_X(1)+2p_X(2) = 0\, P\{\omega_2\} + 1 (P\{\omega_3\}+ P\{\omega_4\}) + 2 (P\{\omega_1\}+ P\{\omega_5\}) =$

$= 0\, P\{\omega_2\} + 1\, P\{\omega_3\}+ 1\, P\{\omega_4\} + 2\, P\{\omega_1\}+ 2\, P\{\omega_5\}$

$= X(\omega_2) P\{\omega_2\} + X(\omega_3) P\{\omega_3\}+ X(\omega_4) P\{\omega_4\} + X(\omega_1) P\{\omega_1\}+ X(\omega_5) P\{\omega_5\}$

$= X(\omega_1) P\{\omega_1\} + X(\omega_2) P\{\omega_2\}+ X(\omega_3) P\{\omega_3\} + X(\omega_4) P\{\omega_4\}+ X(\omega_5) P\{\omega_5\}$

CASO GENERALE (sempre con Ω un insieme finito) le due definizioni di E(X) COINCIDONO, INFATTI

prima di tutto $p_X(x_k)=P(X_k=x_k)= \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k} P\{\omega_i\}$

quindi

$\sum_{k=1,...,n} x_k\, p_X(x_k)= \sum_{k=1,...,n} x_k \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k} P\{\omega_i\}=$

$=\sum_{k=1,...,n} \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k} x_k P\{\omega_i\}=$

(fissato k, nella somma $\sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k} x_k P\{\omega_i\}$, si ha $x_k=X(\omega_i)$)

$=\sum_{k=1,...,n} \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k} X(\omega_i)P\{\omega_i\}=$

(sommare $\sum_{k=1,...,n} \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } X(\omega_i)=x_k}$ corrisponde a sommare su tutti gli ω_i, per i=1,...N)

$= \sum_{i=1,...,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\}$

in quanto si tratta solo di un riordinamento della somma.

25) lunedì 6 maggio 2013

PROPRIETA' DEL VALORE ATTESO (LINEARITA' MONOTONIA, DIM: SOLO NEL CASO della definizione per Ω finito)

LINEARITA': se a,b sono costanti e X e Y sono variabili aleatorie con valore atteso finito, allora

$E(aX+bY)= aE(X)+bE(Y)$

DIM caso Ω finito

$E(aX+bY)= \sum_{i=1,...,N} (a X(\omega_i)+b Y(\omega_i)] P\{\omega_i\} =$

$= a \sum_{i=1,...,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\} + b \sum_{i=1,...,N} Y(\omega_i) P\{\omega_i\} = aE(X) + b E(Y).$

MONOTONIA: se $X \leq Y$ allora $E(X) \leq E(Y)$

DIM caso Ω finito

Se $X(\omega_i) \leq Y(\omega_i)$ allora (ovviamente ,essendo $P\{\omega_i\} \geq 0$)

$E(X) = \sum_{i=1,...,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\} \leq \sum_{i=1,...,N} Y(\omega_i) P\{\omega_i\} = E(Y)$

CALCOLO DEI VALORI ATTESI DI DIVERSE VARIABILI ALEATORIE DISCRETE:

VARIABILE DEGENERE, cioè X assume un solo valore (quindi $X(\omega)=c$, dove c è una costante) allora $E(X)=c$:

INFATTI

$E(X)= \sum_{i=1,...,N} X(\omega_i) P\{\omega_i\} =\sum_{i=1,...,N} c P\{\omega_i\} = c \sum_{i=1,...,N} P\{\omega_i\} =c\ 1 =c$

oppure

$E(X)= c P(X=c)= c\ 1 =c$

FUNZIONE INDICATRICE di un EVENTO , cioè $X(\omega)=1I_A (\omega)$, con A un evento, e

dove $1I_A (\omega)=1$, se ω appartiene ad A ($\omega_i \in A$) e $1I_A (\omega)=0$, se ω non appartiene ad A ($\omega_i \notin A$)

allora $E(X)= E(1I_A)=P(A)$

INFATTI

$E(X)= E(1I_A)= \sum_{i=1,...,N} 1I_A (\omega_i) P\{\omega_i\})=$

$= \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } \omega_i \in A} 1I_A(\omega_i) P\{\omega_i\} + \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } \omega_i \notin A} 1I_A(\omega_i) P\{\omega_i\} =$

$= \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } \omega_i \in A} 1 P\{\omega_i\} + \sum_{i=1,...,N, \text{ tali che } \omega_i \notin A} 0 P\{\omega_i\} = P(A)+0=P(A)$

oppure

$E(X)= E(1I_A)=1 P(A) +0 P(A^c)=P(A)$

UNIFORME DISCRETA in {1,2,...,n}, cioè $P(X=i)=1/n$ per $i=1,2,...,n$: si ha $E(X)=(n+1)/2$

INFATTI

$E(X)= \sum_{k=1,...,n} x_k p_X(x_k)= \sum_{k=1,...,n} k P(X=k)= \sum_{k=1,...,n} k (1/n) =$

$n(n+1)/2 (1/n)= (n+1)/2$

(qui si usa il fatto che $1+2+...+n= n(n+1)/2$: $2(1+2+...+n)= (1+n)+(2+n-1)+...+(n+1)=2n(n+1)$)

BINOMIALE di parametri n e p,

cioè $P(X=k)=C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$ per $k=0,1,2,...,n$

in due modi: con la definizione $E(X) = \sum_{k=0,1,...,n} k P(X=k)$ e un po' di calcoli (consultare un testo)

oppure con il fatto che dove $S_n=1I_{A_1}+1I_{A_2}+...+1I_{A_n}$, dove $A_1,A_2,..., A_n$ formano una famiglia di eventi indipendenti

e tutti con la stessa probabilità: $P(A_i)=p$, $i=1,2,..,n$,

e quindi $P(S_n=k)= P(X=k)=C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$ per $k=0,1,2,...,n$ e di conseguenza

$E(X)=E(S_n) = \sum_{k=0,1,...,n} k C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$

MA INOLTR, **OSSERVAZIONE IMPORTANTE** ,PER LINEARITA' DEL VALORE ATTESO e il fatto che $E(1I_{A_i})=P(A_i)=p$

$E(S_n) = E(1I_{A_1}+1I_{A_2}+...+1I_{A_n})= E(1I_{A_1})+E(1I_{A_2})+...+E(1I_{A_n})= P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=np$

OSSERVAIONE: SI NOTI CHE per quest'ultimo calcolo NON si usa l'indipendenza [che serve però per assicurare che S_n è $Bin(n,p)$] quindi questa idea si può usare per calcolare il valore atteso di una IPERGEOMETRICA

IPERGEOMETRICA, cioè

$P(X=k)= C^b_k C^r_{n-k}/ C^{b+r}_n$ per $0 \le k \le b$, $0 \le n-k \le r$

Si ha che X ha la stessa densità discreta di una variabile aleatoria X_B che conta il numero di palline bianche estratte (SENZA REINSERIMENTO) da un'urna che contiene b+r palline di cui b bianche ed r rosse,

quindi $E(X)=E(X_B)$

ed $X_B=1I_{B_1}+1I_{B_2}+...+1I_{B_n}$, dove B_i="l'i-sima pallina estratta è bianca" e quindi ricordando che $P(B_i)=P(B_1)=b/(b+r)$

$E(X)=E(X_B) = E(1I_B_1+1I_B_2+...+1I_B_n)= E(1I_B_1)+E(1I_B_2)+...+E(1I_B_n)= P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_n)=n\ b/(b+r)$

POISSON, cioè $P(X=k)= \lambda^k/k!\ e^{-\lambda}$, k=0,1,2,...., si ha $E(X)=\lambda$.

infatti

$E(X) = \sum_{k=0,1,...,}\ k\ P(X=k) = \sum_{k=0,1,...}\ k\ \lambda^k/k!\ e^{-\lambda} = \sum_{k=1,...}\ k\ \lambda^k/k!\ e^{-\lambda}$ *(per k=0 kP(X=k)=0P(X=0)=0)*

$= \sum_{k=1,...}\ \lambda^k/(k-1)!\ e^{-\lambda}= \sum_{k=1,...}\ \lambda\ \lambda^{k-1} /(k-1)!\ e^{-\lambda-} = \lambda\ e^{-\lambda}\ \sum_{k=1,...}\ \lambda^{k-1} /(k-1)! =$ *(posto h=k-1)*

$\lambda\ e^{-\lambda}\ \sum_{h=0,1,...}\ \lambda^h /h! = \lambda\ e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = \lambda$.

GEOMETRICA

DA COMPLETARE

26) mercoledì 8 maggio 2013

VALORE ATTESO DI FUNZIONI DI VARIABILI ALEATORIE...

COME posto Z=g(X)

E[g(X)] si può calcolare come

1) Calcolare P(Z=zj) e poi procedere come al solito per calcolare

$E[Z]=\sum_{j\geq 1} z_j\ P(Z=z_j)$

2) $E[g(X)]=\sum_{k\geq 1} g(x_k)\ p_X(x_k)$

ESEMPI e DIMOSTRAZIONE che le due espressioni sono uguali:

ESEMPIO (a lezione ne è stato svolto un altro)

Sia X una v.a. a valori in {-2,-1,0,1,2} e P(X=-2)=P(X=-1)=1/10, P(X=1)=P(X=2)=1/20, P(X=0)=2/10

Sia $Z=X^2$.

Z assume i valori {0,1,4}

e $\{Z=0\}=\{X^2=0\}=\{\{X=0\}$, $\{Z=1\}=\{X^2=1\}=\{X=1\} \cup \{X=-1\}$, $\{Z=4\}=\{X^2=4\}=\{X=2\} \cup \{X=-2\}$

quindi

$P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\}) = 2/10$, $P(\{Z=1\}) = P(\{X^2=1\}) = P(\{X=1\} \cup \{X=-1\}) = P(\{X=1\}) + P(\{X=-1\})=3/20$,

$P(\{Z=4\}) = P(\{X^2=4\}) = P(\{X=2\}) + P(\{X=-2\})=3/20$

quindi

$E(Z)= 0P(Z=0)+1P(Z=1)+4P(Z=4)= 0P(\{X=0\})+ 1 \left(P(\{X=1\}) + P(\{X=-1\})\right) + 4 \left(P(\{X=2\}) + P(\{X=-2\})\right)$

(= 0+3/20+4 3/20=15/20=3/4)

$= 0P(\{X=0\})+1^2 P(\{X=1\}) + (-1)^2 P(\{X=-1\})) + 2^2 P(\{X=2\}) +(-2)^2 P(\{X=-2\})$

(= 0 · 2/10+1/20+1/10+4 · 1/20+ 4 ·1/10 =15/20=3/4)

DIMOSTRAZIONE di

$$\mathbf{E[Z]=\sum_{j\geq 1} z_j P(Z=z_j) = E[g(X)]=\sum_{k\geq 1} g(x_k)\, p_X(x_k)}$$

il punto essenziale è che

$P(Z=z_j) = \sum_{h\geq 1: g(x_h)=z_j} p_X(x_h)$ e quindi

$E[Z]=\sum_{j\geq 1} z_j P(Z=z_j) =$

$$= \sum_{j\geq 1} z_j \sum_{h\geq 1: g(x_h)=z_j} p_X(x_h) = \sum_{j\geq 1} \sum_{h\geq 1: g(x_h)=z_j} z_j\, p_X(x_h) = \sum_{j\geq 1} \sum_{h\geq 1: g(x_h)=z_j} g(x_h)\, p_X(x_h)$$

dove l'ultima uguaglianza dipende dal fatto che si sta sommando sui valori h per i quali $z_j=g(x_h)$.

Basta osservare che

$$\sum_{j\geq 1} \sum_{h\geq 1: g(x_h)=z_j} g(x_h)\, p_X(x_h)$$

corrisponde a sommare tutti i valori $g(x_k)\, p_X(x_k)$ in ordine diverso da quello naturale

VARIANZA definizione e proprietà

$Var(X):= E[(X-E(X))^2]$

Dalla definizione si vede subito che Var(X)>=0

E' inoltre facile controllare che $Var(aX+b)=a^2 Var(X)$

Osservazione

$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

questa formula è spesso comoda per calcolare la varianza

infatti: $Var(X):= E[(X-E(X))^2]$

e $(X-E(X))^2= X^2 -2X E(X) +(E(X))^2$, quindi,

$E[(X-E(X))^2]= E[X^2 -2X E(X) +(E(X))^2] = E[X^2] -2 E[X] E(X) +(E(X))^2]= E[X^2] - (E(X))^2$

calcolo della varianza di una v.a.

ESEMPIO (a lezione ne è stato svolto un altro)

Sia X una v.a. a valori in {-2,-1,0,1,2} e P(X=-2)=P(X=-1)=1/10, P(X=1)=P(X=2)=1/20, P(X=0)=2/10

Allora

$E(X)= (-2)P(X=-2)+(-1)P(X=-1)+0P(X=0)+1 P(X=1)+2P(X=2)=(-2) \cdot 1/10 +(-1) \cdot 1/10 +0 \cdot 2/10 + 1 \cdot 1/20 +2 \cdot 1/20$

$= -3/10+2/20=-3/20$

$Var(X):= E[(X-E(X))^2] = E(X^2)-(E(X))^2= 3/4 -(3/20)^2=3/4 -9/400= 300/400-9/400=291/400$

ESERCIZI DAL FILE tutoraggio_2010

http://twiki.dsi.uniroma1.it/twiki/viewfile/CP/WebHome?rev=1;filename=tutoraggio_2010.pdf

in particolare sull'approssimazione di POISSON (esercizi 3 e 4 di 4-5 Maggio 2010)

DA COMPLETARE?

venerdì 10 maggio 2013

SOSPENSIONE DELLE LEZIONI per la Lectio Magistralis del premio Turing 2012, SILVIO MICALI (MIT)

27) lunedì 13 maggio 2013

calcolo della varianza per la funzione indicatrice di un evento

calcolo della varianza di una v.a. BINOMIALE

calcolo della varianza di una v.a. POISSON

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV (Dim come su APPUNTI NAPPO-SPIZZICHINO)

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV

Sia X una variabile aleatoria con E(X) e $E(X^2)$ finiti.

Per ogni >0 si ha

$P(| X-E(X)| > \varepsilon) \leq Var(X)/\varepsilon^2$

(per la dimostrazione con la disuguaglianza di Markov vedere la prossima lezione e il libreo di Ross e/o Baldi)

dimostrazione per variabili discrete a valori $x_1,...x_n$ con $p_X(x_i)=P(X=x_i)$

$Var(X)= E[(X-E(X))^2]=\sum_{i=1,...,n} (x_i-E(X))^2 \; p_X(x_i)$

$= \sum_{_\{i=1,...,n \text{ t.c}|x_i-E(X)|>\varepsilon\}} (x_i-E(X))^2 \; p_X(x_i)+\sum_{_\{k=1,...,n \text{ t.c}|x_i-E(X)|\leq\varepsilon \}} (x_i-E(X))^2 \; p_X(x_i)$ *($(x_i-E(X))^2 \; p_X(x_i) \geq 0$)*

$\geq \sum_{_\{i=1,...,n \text{ t.c}|x_i-E(X)|>\varepsilon\}} (x_i-E(X))^2 \; p_X(x_i) \geq \sum_{_\{i=1,...,n \text{ t.c}|x_i-E(X)|>\varepsilon \}} \varepsilon^2 \; p_X(x_i)$

$= \varepsilon^2 \sum_{_\{i=1,...,n \text{ t.c}|x_i-E(X)|>\varepsilon\}} P(X=x_i) = \varepsilon^2 \; P(X \in \{x_i \text{ tali che } |x_i-E(X)|>\varepsilon\}) =$

$= \varepsilon^2 \; P(|X-E(X)|>\varepsilon)$

Cenno all'utilizzo della disuguaglianza di Chebyshev per dimostrare che la frequenza è vicina alla probabilità, nel caso di esperimenti ripetuti.

Legge dei grandi numeri per il numero di successi

Supponiamo di avere una successione di eventi/prove indipendenti e tutti/tutte con la stessa probabilità p e che S_n conti il numero dei successi fino all'n-sima prova allora la frequenza dei successi S_n/n è "vicina" alla probabilità p, nel senso che

qualunque sia $\varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} P(| S_n/n -p| > \varepsilon)=0$

La tesi equivale a

$\lim_{n\to\infty} P(| S_n/n -p| \leq \varepsilon)= \lim_{n\to\infty} P(p-\varepsilon \leq S_n/n \leq p+\varepsilon)$

$= \lim_{n\to\infty} P(S_n/n - \varepsilon \leq p \leq S_n/n + \varepsilon)= 1$

ossia, **per n "GRANDE",**

la probabilità che la media aritmetica dei successi (o frequenza dei successi) e la probabilità di successo differiscano di "poco" è una probabilità "vicina" a 1.

DIMOSTRAZIONE

$| S_n/n -p| \leq \varepsilon \Leftrightarrow | S_n -np| \leq n \varepsilon$

DA CUI

$1\geq P(| S_n/n -p| \leq \varepsilon) = P(| S_n -np| \leq n \varepsilon)$,

inoltre

Dis. di Chebyshev (CON S_n al posto di X, np=E(S_n), ED $n\varepsilon$ al posto di ε)

$\downarrow$

$1\geq P(| S_n/n -p| \leq \varepsilon) = P(| S_n -np| \leq n \varepsilon)\geq 1- Var (S_n)/(n \varepsilon)^2= 1- np(1-p)/(n^2 \varepsilon^{2)}=$

$= 1- p(1-p)/(n \varepsilon^{2)} \rightarrow 1$

28) mercoledì 15 maggio 2013

Dimostrazione della DISUGUALGIANZA DI CHEBYSHEV (come su ROSS inizio capitolo 8) con la disuguaglianza di Markov:

Disuguaglianza di Markov: se Y è una v.a. con $Y\geq 0$ e a è un numero reale strettamente positivo (a>0)

allora

$P(Y>a) \leq E(Y)/a$

e per ogni r>0 $P(Y>a) \leq E(Y^r)/a^r$.

OSSERVAZIONE Ovviamente la disuguaglianza è interessante solo se E(Y) è finito e $E(Y)/a <1$

e $E(Y^r)< \infty$ e $E(Y^r)/a^r<1$, rispettivamente.

DIMOSTRAZIONE:

$P(Y>a)= E(1_{ Y>a })$

la tesi segue immediatamente dalle proprietà del valore atteso non appena si osserva che

$1_{ Y>a } \leq Y/a$ (per la verifica vedere più sotto)

allora, per la proprietà di monotonia del valore atteso

$E(1_{ Y>a }) \leq E(Y/a)$

e quindi

$P(Y>a)= E(1_{ Y>a }) \leq E(Y/a) =E(Y)/a$

(si usa la proprietà di linearità per l'ultima uguaglianza)

VERIFICA DI $1_{ Y>a } \leq Y/a$

si hanno solo due casi 1_{ Y>a }=0 oppure 1_{ Y>a }=1

se 1_{ Y>a }=0 allora ovviamente 1_{ Y>a } <= Y/a in quanto Y/a>=0

se 1_{ Y>a }=1 allora ovviamente Y>a ed equivalentemente Y/a>1 (essendo a >0)

e quindi Y/a > 1 = 1_{ Y>a }

OSSERVAZIONE: vale anche $P(Y \geq a) \leq E(Y)/a$ e per ogni r>0 $P(Y \geq a) \leq E(Y^r)/a^r$.

la dimostrazione è identica!!

DIMOSTRAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV:

basta prendere nella disuguaglianza di Markov $Y=|X-E(X)|$ $a=\varepsilon$ ed r=2, e infine notare che

$E[|X-E(X)|^2]=E[(X-E(X))^2]=Var(X)$.

Calcolo della varianza di una v.a. X Geometrica di parametro p ($E(X)=1/p$, $E(X^2)=(2-p)/p^2$, $Var(X)=(1-p)/p^2$,

Utilizzo delle disuguaglianze di Chebyshev e Markov nel caso di una v.a. Geometrica di parametro p=1/4

$P(X>10)= (3/4)^{10}$

$P(X>10) <= E(X)/10=4/10$ (Markov per r=1)

$P(X>10)<= E(X^2)/100= (7/4)/(1/4^2)/100=28/100$

$P(X>10)<= P(X>10)+P(X<-2)=P(|X-4|>6)<= Var(X)/6^2=12/36=1/3$

[ATTENZIONE IN REALTA' in questo caso P(X<-2)=0 e quindi P(X>10)= P(X>10)+P(X<-2)]

in generale

Varianza della somma di due v.a. VERIFICA DI

Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2 Cov(X,Y)

dove Cov(X,Y)= covarianza di X e Y definita da

Cov(X,Y)=E[(X-E(X)) (Y-E(Y))]

verifica di **E[(X-E(X)) (Y-E(Y))]= E(XY)-E(X)E(Y)**

Calcolo della Covarianza di X=1_A e Y=1_B: Cov(1_A, 1_B)=P(AB)-P(A)P(B)

QUINDI

se A e B sono indipendenti Cov(1_A, 1_B)=0

se A e B sono correlati positivamente Cov(1_A, 1_B)>0

se A e B sono correlati negativamente Cov(1_A, 1_B)<0

FORMULA DELLA VARIANZA DI X_1+X_2+.....+X_n

Var(X_1+X_2+.....+X_n)= Var(X_1) + Var(X_2) +.....+Var(X_n) + $\sum\sum_{h/=k}$ Cov(X_h, X_k)

(dimostrazione fatta, ma facoltativa)

CALCOLO DI Var(X) se X è una variabile aleatoria Bin(n,p) utilizzando la formula precedente

equivale a calcolare Var(S_n)

dove S_n=1_A_1+1_A_2+ .....+ 1_A_n, e dove A_1 ,..., A_n, sono eventi globalmente indipendenti e tutti con P(A_i)=p.

[infatti sappiamo che S_n è una v.a. Bin(n,p) e quindi E[g(X)] =E[g(S_n)], in particolare E(X)=E(S_n) e E(X^2)=E[(S_n)^2] e quindi Var(X)=Var(S_n)]

Allora

E(S_n)=E(1_A_1+1_A_2+ .....+ 1_A_n)= E(1_A_1)+E(1_A_2)+ .....+ E(1_A_n)= P(A_1)+P(A_2)+ .....+ P(A_n) **=n p**

Var(X)=Var(S_n)= Var(1_A_1)+ Var(1_A_2)+ .....+ Var(1_A_n) + $\sum\sum_{h/=k}$ Cov(1_A_h, 1_A_k)

=nVar(1_A_1)+0= n p(1-p)

in quanto Cov(1_A_h, 1_A_k)=0 per h/=k, essendo gli eventi A_1 ,..., A_n globalmente indipendenti,

e Var(1_A_1)= P(A_1A_1)-P(A_1) P(A_1)= P(A_1)-P(A_1) P(A_1)= P(A_1)(1--P(A_1))=p(1-p)

29) venerdì 17 maggio 2013

Dimostrazione della formula della varianza della somma (obbligatoria per n=2) facoltativa per n generico

FORMULA DELLA VARIANZA DI X_1+X_2+.....+X_n

Var(X_1+X_2+.....+X_n)= Var(X_1) + Var(X_2) +.....+Var(X_n) + $\sum\sum_{h/=k}$ Cov(X_h, X_k)

CALCOLO DELLA VARIANZA DI UNA DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

se P(X=k)=C^b_k C^r_(n-k)/C^(b+r)_n per 0<=k<=b 0<=n-k<=r

allora X ha la stessa distribuzione di Z_n dove Z_n è la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche estratte da un'urna che contiene b palline bianche ed r rosse

e inoltre

Z_n=1_B_1+1_B_2+ .....+ 1_B_n, e dove B_i è l'evento "l'i-esima pallina estratta è bianca"

allora

E(X)=E(Z_n)=E(1_B_1+1_B_2+ .....+ 1_B_n) = E(1_B_1)+E(1_B_2)+ .....+ E(1_B_n)= P(B_1)+P(B_2)+ .....+ P(B_n) **=n b/(b+r)**

inoltre

Var(X)=Var(Z_n)= Var(1_B_1)+ Var(1_B_2)+ .....+ Var(1_B_n) + $\sum\sum_{h/=k}$ Cov(1_B_h, 1_B_k)

=nVar(1_B_1)+n(n-1) Cov (1_B_1, 1_B_2)= n P(B_1) (1- P(B_1)) +n(n-1) [P(B_1B_2)-P(B_1) P(B_1)]

ora

P(B_1B_2)-P(B_1) P(B_1)= P(B_1)P(B_2| B_1)-P(B_1) P(B_1)= P(B_1) [P(B_2| B_1)-P(B_1)]= P(B_1) [(b-1)/(b+r-1) - b/(b+r)]

= P(B_1) [(b-1) (b+r) - b(b+r-1)] /(b+r-1)(b+r) = P(B_1) (-r)/(b+r-1)(b+r) = - P(B_1) (1- P(B_1)) (1/(b+r-1))

(dove l'ultima uguaglianza deriva dall'osservare che 1- P(B_1) =r/(b+r)

e quindi,

Var(X)=Var(Z_n)= n P(B_1) (1- P(B_1)) +n(n-1) [P(B_1B_2)-P(B_1) P(B_1)]= n P(B_1) (1- P(B_1)) - n(n-1) P(B_1) (1- P(B_1)) (1/(b+r-1))

= n P(B_1) (1- P(B_1)) [1- (n-1)/(b+r-1)] = **n (b/(b+r)) (1- b/(b+r)) [1- (n-1)/(b+r-1)] =n p_B(1-p_B) [1- (n-1)/(M-1)]**

dove p_B=P(B_i)=b/(b+r) ed M=b+r

OSSERVAZIONE 1

Prendere n=b+r corrisponde a estrarre tutte le palline dall'urna e allora Z_{b+r} =b è una variabile aleatoria degenere

(ossia assume un solo valore) e quindi la sua varianza vale 0, come del resto appare dalla formula

[infatti **1-(n-1)/(b+r-1) =1-1=0** quando n=b+r]

OSSERVAZIONE2

RICHIAMO: le probabilità binomiali si possono usare come approssimazione delle probabilità ipergeometriche, quando n è fissato, b ed r tendono ad infinito, ma b/(b+r)=p (o tende a p) . Ciò si riflette nel fatto che per n fissato e b+r grande Var(Z_n)=np(1-p) [1- (n-1)/(b+r-1)] è ben approssimata da np(1-p) che corrisponde alla varianza di una v.a. binomiale con lo stesso n e probabilità p.

DENSITA' DISCRETA CONGIUNTA DI DUE VARIABILI ALEATORIE X e Y, TABELLA della densità discreta congiunta, DENSITA' MARGINALE di X e DENSITA' MARGINALE di Y, CALCOLO DEL VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE g(X,Y)

ESEMPIO DI CALCOLO DELLA DENSITA' DISCRETA DI UNA VARIABILE ALEATORIA Z=g(X,Y)= X+Y

ESERCIZIO SVOLTO:

Siano X e Y due variabili aleatorie con X(Omega)={-1,0,1} e Y(\Omega)={1,2,3,4}

Si assuma P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=3)=P(X=0,Y=2)=P(X=0,Y=4)=1/10, P(X=1,Y=1)=P(X=1,Y=4)=c e P(X=i,Y=j)=0 in tutti gli altri casi

1) trovare il valore di c

2) trovare le densità marginali di X e Y

3) calcolare E(X) ed E(Y)

4) calcolare Cov(X,Y)

5) calcolare Var(X+Y)

6) calcolare la densità discreta di Z=X+Y

30) lunedì 20 maggio 2013

densità discreta congiunta di due o piu' variabili ESEMPIO MUTLINOMIALE

URNA con M=m_A+m_B+m_C+m_D palline

m_A=# palline ARANCIONI

m_B=# palline BIANCHE

m_C= #palline CELESTI

m_D=#palline DORATE

n ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO

S^A_n=# di volte in cui viene estratta una pallina ARANCIONE

S^B_n=# di volte in cui viene estratta una pallina BIANCA

S^C_n=# di volte in cui viene estratta una pallina CELESTE

S^D_n=# di volte in cui viene estratta una pallina DORATA

Chiaramente S^A_n ha distribuzione Bin(n,p_A) dove p_A=m_A/M

e analogamente

S^B_n ha distribuzione Bin(n,p_B) dove p_B=m_B/M

S^C_n ha distribuzione Bin(n,p_C) dove p_C=m_C/M

S^D_n ha distribuzione Bin(n,p_D) dove p_D=m_D/M

la densità discreta congiunta di (S^A_n, S^B_n, S^C_n, S^D_n) è

P(S^A _n=k_A, S^B_n=k_B, S^C_n=k_C, S^D_n=k_D)= 0 tranne quando

k_A, k_B,k_C,k_D >= 0 e k_A+ k_B+k_C+k_D=n

e vale

P(S^A _n=k_A, S^B_n=k_B, S^C_n=k_C, S^D_n=k_D)=n!/(k_A! k_B!k_C!k_D!) (p_A) ^{k_A} (p_B)^{k_B} (p_C)^{k_C}(p_D)^{k_D}.

ovviamente S^C_n+S^C_n= S^{CoD}_n = # volte in cui esce una pallina CELESTE o DORATA

e quindi

S^C_n+S^C_n ha distribuzione Bin(n, p_C+p_D)

Analogamente

S^A_n+S^B_n ha distribuzione Bin(n, p_A+p_B)

e altre simili

--- **DENSITA' DISCRETA CONGIUNTA DI S^A_n e S^B_n:**

se k_A, k_B>=0 e k_A+k_B<=n allora

P(S^A _n=k_A, S^B_n=k_B)= P(S^A _n=k_A, S^B_n=k_B, S^{CoD}_n=n-(k_a+k_B))=

=n!/ (k_A! k_B! (n-k_A-k_B)!) (p_A) ^{k_A} (p_B)^{k_B} (p_C+p_D)$^{n-k_A-k_B}$=

=n!/ (k_A! k_B! (n-k_A-k_B)!) (p_A) ^{k_A} (p_B)^{k_B} (1-p_A-p_B)$^{n-k_A-k_B}$.

mentre

P(S^A _n=k_A, S^B_n=k_B)=0 altrimenti

calcolo della covarianza

cov (S^A_n, S^B_n) = - n p_A p_B

IDEA

Var(S^A_n+S^B_n) = Var(S^A_n)+Var(S^B_n)+2Cov(S^A_n,S^B_n)

poiché la varianza di una v.a. binomiale di parametri n e p vale np(1-p)

di ha

n(p_A+p_B) (1- p_A-p_B) = n p_A (1-p_A) + n p_B (1-p_B) + 2Cov(S^A_n,S^B_n)

da cui

Cov(S^A_n,S^B_n) = (1/2) [n(p_A+p_B) (1- p_A-p_B) - n p_A (1-p_A) - n p_B (1-p_B)]

= (1/2) n [p_A (1- p_A-p_B) +p_B (1- p_B-p_A) - p_A (1-p_A) - p_B (1-p_B)]

= = (1/2) n (- 2 p_A p_B) = -n p_A p_B

ESEMPIO DEL SECONDO ESONERO DEL 6 giugno 2012 ESERCIZIO 2

DEFINZIONE di variabili aleatorie indipendenti e relazioni tra non correlazione e indipendenza

X e Y v.a. DISCRETE si dicono **indipendenti** se per ogni scelta degli intervalli I e J (ovvero per ogni I e J contenuti in X(Omega) e Y(Omega) rispettivamente)

P(X appartiene a I e Y appartiene a J)= P(X appartiene a I) P(Y appartiene a J)

Chiaramente scegliendo

I={x_i} e J={y_j} si ha che la precedente definizione implica che

P(X =x_i e Y=y_j)= P(X=x_i) P(Y=y_j) per ogni x_i e y_j

ovvero

p_{X,Y}(x_i,y_j)= p_X(x_i) p_Y(y_j) per ogni x_i e y_j

Cioè la densità discreta congiunta di X e Y è il prodotto delle densità discrete marginali .

AFFERMAZIONE NON DIMOSTRATA

vale anche il viceversa, cioè

se

"$p_{X,Y}(x_i,y_j)= p_X(x_i) \, p_Y(y_j)$ per ogni x_i e y_j"

allora

"P(X appartiene a I e Y appartiene a J)= P(X appartiene a I) P(Y appartiene a J)

per ogni scelta degli intervalli I e J."

DIMOSTRAZIONE di

X e Y v.a. discrete INDIPENDENTI (e che assumono un numero finito di valori) implica

$E[g_1(X)g_2(Y)]= E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$

(infatti $E[g_1(X)g_2(Y)]= \sum_i \sum_j g_1(x_i) \, g_2(y_j) \, p_{X,Y}(x_i,y_j)=$ (*per l'ipotesi di INDIPENDENZA*)

$= \sum_i \sum_j g_1(x_i) \, g_2(y_j) \, p_X(x_i) \, p_Y(y_j)=$ (*i fattori $g_1(x_i)$ $p_X(x_i)$ non dipendono dall'indice j*)

$= \sum_i g_1(x_i) \, p_X(x_i) \, \sum_j g_2(y_j) \, p_Y(y_j)=$ (*la somma $SUM_j \, g_2(y_j) \, p_Y(y_j)=E[g_2(Y)]$*)

$= \sum_i g_1(x_i) \, p_X(x_i) \, E[g_2(Y)] = E[g_2(Y)] \, \sum_i g_1(x_i) \, p_X(x_i) =$

(*la somma $\sum_i g_1(x_i) \, p_X(x_i) = E[g_1(X)]$*)

$= E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$

e quindi DIMOSTRAZIONE DI

"se X e Y sono indipendenti" allora " X e Y sono scorrelate, ossia Cov(X,Y)=0"

(infatti per $g_1(x)=x$ e $g_2(y)=y$ si ottiene che, se X e Y sono indipendenti, allora $E(XY) = E(X)E(Y)$

e quindi $Cov(X,Y):= E[(X-E(X)) (Y-E(Y))]= E(XY)-E(X)E(Y)= E(X)E(Y)-E(X)E(Y)=0$

OSSERVAZIONE

se **" $Cov(X,Y) \neq 0$** (cioè se $Cov(X,Y)>0$ o <0) " allora X e Y **NON SONO INDIPENDENTI**

ATTENZIONE se "$Cov(X,Y)=0$" allora NON POSSIAMO DIRE NULLA: possono essere indipendenti oppure no

Ci sono molti esempi; quello dell'ESERCIZIO 2 del 2° esonero 6 giugno 2012 ne è un esempio

ma ce ne sono molti altri.

PER più variabili aleatorie, X_1,X_2,...X_n, l'indipendenza globale significa, per ogni scelta di I_1, I_2,..., I_n,

P(X_1 appartiene a I_1, X_2 appartiene a I_2, ..., X_n appartiene a I _n)=

P(X_1 appartiene a I_1)P(X_2 appartiene a I_2) ....P(X_n appartiene a I _n)

ed equivale a "la densità discreta congiunta è il prodotto delle densità marginali"

p_{X_1,X_2,...X_n}(xi_1.xi_2,...xi_n)=p_{X_1})(xi_1) p_{X_2})(xi_2)..... p_{X_n})(xi_n)

L'indipendenza globale implica l'indipendenza a due a due, NON E' VERO IL VICEVERSA.

(tutto senza dimostrazione)

31) mercoledì 22 maggio 2013

RICHIAMO: se X e Y INDIPENDENTI allora X e Y sono scorrelate cioè Cov(X,Y)=0, ma NON è vero il viceversa:

ESEMPIO DI due v.a. X e Y NON INDIPENDENTI e con Cov(X,Y)=0

X assume i valori -2, -1, +1, +2 e P(X=k)=1/4, Y:=X^2 e quindi Y assume i valori 1 e 4 con probabilità positiva

(è facile fare il conto e ottenere P(Y=i)=1/2, ma ai fini dell'esempio è inessenziale)

X e Y non sono indipendenti, infatti ad esempio P(X=1, Y=4)=0 ≠ P(X=1) P(Y=4)>0

TUTTAVIA Cov(X,Y)=0, infatti

Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]= E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)-0E(Y)=E(XY)=E(X X^2)=E(X^3)=

=(-2)^3(1/4)+(-1)^3(1/4)+1^3(1/4)+2^3(1/4)=0

---- Se X e Y sono indipendenti (quindi scorrelate) allora Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y) e ciò si generalizza anche al caso di n variabili aleatorie X_1, X_2,...X_n: se X_1, X_2,...X_n sono indipendenti a due a due, cioè se per ogni i ≠j Cov(X_i,X_j)=0 allora

Var(X_1+X_2+...X_n) = Var(X_1) + Var(X_2)+.....+ Var(X_n)

ESEMPIO Si lanciano due dadi e siano X_1 e X_2 i risultati ottenuti con il primo e con il secondo dado, rispettivamente.

siano Y_1= min(X_1,X_2) e Y_2=max(X_1, X_2)

CALCOLARE $Var(Y_1+Y_2)$

in questo caso INVECE di procedere con il metodo generale, ossia calcolare la densità congiunta discreta di Y_1 e Y_2

e poi trovare le (densità discrete) marginali di Y_1 e di Y_2 e calcolare $E(Y_1)$ e $E(Y_2)$

conviene osservare che $Y_1+Y_2= \min(X_1,X_2) +\max(X_1, X_2)=X_1+X_2$ e quindi

$Var(Y_1+Y_2)= Var(X_1+X_2)= Var(X_1)+Var(X_2)=2Var(X_1) =$

(*in quanto X_1 e X_2 sono indipendenti $P(X_1=i,X_2=j)=1/36=P(X_1=i)P(X_2=j)$*

e sono entrambe uniformi su{1,2,3,4,5,6})

$E(X_1)=(6+1)/2=7/2$ e $E(X_1^2)= \sum_{k=1,...6} k^2 P(X_1=k)= (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]=91/6$

e quindi $Var(X_1)=35/12$

Più in generale se X è una v.a. UNIFORME in {1,2,...,n}, cioè $P(X=i)=1/n$ per i=1,2,...,n

si ha

$E(X)= \sum_{k=1,...6} k P(X=k)= (1/n) \sum_{k=1,...6} k = (1/n) n(n+1)/2=(n+1)/2$

$E(X^2)= \sum_{k=1,...6} k^2 P(X=k) = (1/n) \sum_{k=1,...6} k^2= (1/n) n(n+1/2)(n+1)/3 = (n+1/2)(n+1)/3$

e quindi

$Var(X)= E(X^2)-(E(X))^2 = (n+1/2)(n+1)/3 - (n+1)^2/4= (n+1) [4(n+1/2)- 3(n+1)]/12= (n+1) [n-1]712= (n^2-1)/12$

LEGGE (DEBOLE) DEI GRANDI NUMERI in generale

Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti (a due a due) e tutte con la stessa distribuzione.

Si assuma che valore atteso e varianza di X_n esistano e siano finiti : $E(X_n)= \mu_X$ e $Var(X_n)=\sigma_X^2$, allora

(μ si legge "mu" e σ si legge "sigma")

POSTO

$S_n= X_1+X_2+...+X_n$

per ogni $\varepsilon>0$ *(ε si legge" epsilon")*

$\lim_{n} P(|S_n/n -\mu_X|>\varepsilon) = 0$ o equivalentemente **$\lim_{n} P(|S_n/n -\mu_X|\leq \varepsilon) = 1$**

NOTA BENE: L'interesse risiede nel fatto che, se consideriamo

$|S_n/n - \mu_X|\leq \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $-\varepsilon\leq S_n/n -\mu_X\leq +\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\mu_X - \varepsilon \leq S_n/n \leq \mu_X +\varepsilon$

$| \mu_X - S_n/n | \leq \varepsilon \Leftrightarrow$ $-\varepsilon \leq \mu_X - S_n/n \leq +\varepsilon$ **$\Leftrightarrow$ $S_n/n - \varepsilon \leq \mu_X \leq S_n/n + \varepsilon$**

e ciò significa che con probabilità vicina ad 1 (se n è grande) il valore atteso è compreso in un intervallo di ampiezza

2ε centrato nella media aritmetica dei valori osservati negli esperimenti.

DIMOSTRAZIONE della LEGGE (DEBOLE) dei GRANDI NUMERI

passo 1) $E(S_n/n) = \mu_X$

infatti $E(S_n/n)=(1/n)E(S_n)=(1/n)E[X_1 + X_2+.....+ X_n] =(1/n) [E(X_1) + E(X_2)+.....+ E(X_n)]= (1/n)\, n\, \mu_X = \mu_X$

passo 2) $Var(S_n/n)= \sigma_X\,^2/n$

Infatti $Var(S_n/n)= (1/n)^2\, Var(S_n)$ *(in quanto $Var(aX)=a^2\, Var(X)$)*

$= (1/n)^2\, Var(X_1+X_2+...X_n)$

$= (1/n)^2\ [Var(X_1) + Var(X_2)+.....+ Var(X_n)]$ *(in quanto $Cov(X_i, X_j)=0$ per $i \neq j$)*

$= (1/n)^2\ n\, \sigma_X^2 = \sigma_X^2/n$

passo 3) $0 \leq P(|S_n/n - \mu_X|>\varepsilon) \leq \sigma_X\,^2/(n\, \varepsilon^2)$

Infatti

$0 \leq P(|S_n/n - \mu_X|>\varepsilon)=$ (*per il passo 1*) $= P(|S_n/n - E(S_n/n)|> \varepsilon) \leq$ (*disuguaglianza di Chebyshev*)

$\leq Var(S_n/n)/\varepsilon^2=$(*per il passo 2*) $= \sigma_X^2/(n\, \varepsilon^2)$

passo 4) $0 \leq \lim_n P(|S_n/n - \mu_X|>\varepsilon) \leq \lim_n\, \sigma_X^2/(n\, \varepsilon^2) = 0$

ossia, per il teorema del confronto (o dei carabinieri) si ottiene la tesi

SOMMA DI VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

Se $X_1 \sim Bin(n_1,p)$ e $X_2 \sim Bin(n_2,p)$, con X_1 e X_2 indipendenti

Allora $X_1+X_2 \sim Bin(n_1+n_2,p)$

PRIMA DI FARE I CONTI SI OSSERVI che ciò discende immediatamente dal fatto che si può pensare di avere a disposizione uno schema di BERNOULLI con $n=n_1+n_2$, (n prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità p)

che X_1 sia il numero di successi sulle prime n_1 prove e che X_2 sia il numero di successi sulle n_2 prove successive (ossia dalla prova n_1+1 alla prova n_1+n_2)

quindi X_1+X_2 è il numero di successi su tutte le $n_1 + n_2$ prove e quindi ha distribuzione binomiale

Bin(n_1+n_2,p)

VERIFICA FORMALE:

$P(X_1+X_2=k) = \sum_{h=0, 1, n_1}P(X_1=h, X_1+X_2=k)= \sum_{h=0, 1, n_1}P(X_1=h, h+X_2=k)$

$= \sum_{h=0, 1, n_1}P(X_1=h, X_2=k-h)$

$= \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2}P(X_1=h, X_2=k-h)$ *(in quanto $0 \le X_2 \le n_2$)*

$= \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2}P(X_1=h) P(X_2=k-h)$ *(in quanto X_1 e X_2 sono indipendenti)*

$= \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2} C^{n_1}_h \; p^h (1-p)^{n_1-h} C^{n_2}_{k-h} p^{k-h} (1-p)^{n_2-(k-h)}$

$= \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2} C^{n_1}_ C^{n_2}_{k-h} \; h \; p^h p^{k-h} \; (1-p)^{n_1-h} (1-p)^{n_2-k+h}$

$= p^k \; (1-p)^{n_1+n_2-k} \; \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2} C^{n_1}_ C^{n_2}_{k-h}$

(si moltiplica e si divide per $C^{n_1+n_2}_{k}$)

$= C^{n_1+n_2}_{k} \; p^k \; (1-p)^{n_1+n_2-k} \; \sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2} C^{n_1}_ C^{n_2}_{k-h} / C^{n_1+n_2}_{k}$

$= C^{n_1+n_2}_{k} \; p^k \; (1-p)^{n_1+n_2-k}$

(in quanto $\sum_{0 \le h \le n_1, 0 \le k-h \le n_2} C^{n_1}_ C^{n_2}_{k-h} / C^{n_1+n_2}_{k} = 1$ poiché

$C^{n_1}_ C^{n_2}_{k-h} / C^{n_1+n_2}_{k}$ è la probabilità di estrarre h palline di tipo 1

da un'urna che contiene n_1 palline di tipo 1 ed n_2 palline di tipo 2 in k estrazioni SENZA reinserimento)

Se $Y_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y_2 \sim Poisson(\lambda_2)$, con Y_1 e Y_2 indipendenti

Allora $Y_1+Y_2 \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

IDEA:

Limitiamoci al caso in cui $\lambda_1/\lambda_2 = n_1/n_2$ con n_1 ed n_2 molto grandi .

Posto $p:= \lambda_1/ n_1=\lambda_2/ n_2$ possiamo pensare che p sia minore di 1 e molto piccolo

(si può sempre fare: se $\lambda_1/\lambda_2 = m_1/m_2$, allora $\lambda_1/\lambda_2 =(m_1n)/(m_2 n)$, per ogni n)

allora, per l'approssimazione di Poisson possiamo affermare

che $P(Y_1=k) \cong P(X_1=k)$ e che $P(Y_2=k) \cong P(X_2=k)$, dove

$X_1 \sim Bin(n_1,p)$ e $X_2 \sim Bin(n_2,p)$, con X_1 e X_2 indipendenti

Allora $P(Y_1+Y_2=k) \cong P(X_1+X_2=k)$ con $X_1+X_2 \sim Bin(n_1+n_2,p)$

ma allora, essendo n_1+n_2 grande, possiamo affermare che

$P(X_1+X_2=k) = \lambda^k/k! \exp\{-\lambda\}$ con $\lambda=(n_1+n_2)p= \lambda_1+\lambda_2$

VERIFICA FORMALE

$P(X_1+X_2=k) = \sum_{h\geq 0}P(X_1=h, X_1+X_2=k)= \sum_{h\geq 0}P(X_1=h, h+X_2=k)$

$= \sum_{h\geq 0}P(X_1=h, X_2=k-h)$

$= \sum_{h\geq 0\ k-h\geq 0}P(X_1=h, X_2=k-h)$ *(in quanto $0 \leq X_2$)*

$= \sum_{0 \leq h \leq k}P(X_1=h) P(X_2=k-h)$ *(in quanto X_1 e X_2 sono indipendenti)*

$= \sum_{0 \leq h \leq k} (\lambda_1)^h/h! \exp\{-\lambda_1\} (\lambda_2)^{k-h}/(k-h)! \exp\{-\lambda_2\}$

$= \sum_{0 \leq h \leq k}(1/[h! (k-h)!]) (\lambda_1)^h (\lambda_2)^{k-h} \exp\{-\lambda_1\} \exp\{-\lambda_2\}$

(si moltiplica e si divide per k!)

$= (1/k!) \sum_{0 \leq h \leq k} k! (1/[h! (k-h)!]) (\lambda_1)^h (\lambda_2)^{k-h} \exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)\}$

(in quanto $\sum_{0 \leq h \leq k} (k!/[h! (k-h)!]) (\lambda_1)^h (\lambda_2)^{k-h} =(\lambda_1+\lambda_2)^k$

per la formula di Newton per il calcolo della potenza del binomio)

----------fino a qui ----------

32) venerdì 24 maggio 2013

ESEMPI DI v.a. INDIPENDENTI

gli INTERTEMPI DI r-simo SUCCESSO $D_r=T_r-T_{r-1}$, dove T_r= tempo di r-simo successo

in prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità p. Per convenzione $T_0=0$ cosi'

$D_1=T_1$, $D_2=T_2-T_1$, etc.

INDICHEREMO CON A_i l'evento "successo alla i-sima prova" e con A_i^cl'evento insuccesso all'i-sima prova:

gli eventi A_i, $i \geq 1$, formano una famiglia di eventi GLOBALMENTE INDIPENDENTI e con $P(A_i)=p$ per ogni i,

(si pensi al caso del lancio di una moneta, non necessariamente ben equilibrata, in questo caso

A_i="all'i-simo lancio viene testa", e probabilità di testa vale p)

AFFERMAZIONE:

SI HA CHE le v.a. D_i sono INDIPENDENTI,ossia

$P(D_1=k_1, D_2=k_2,...., D_n=k_n)= P(D_1=k_1) P(D_2=k_2).... P(D_n=k_n)$ per ogni scelta di $k_i\geq 1$

e tutte con distribuzione GEOMETRICA (p), ossia

$P(D_i=k_i)=(1-p)^{k_i-1} p$, per $k_i\geq 1$

$E(D_i)=1/p$ e $Var(D_i)=(1-p)/p^2$

INOLTRE

$T_n=D_1+D_2+...+D_n$ e quindi $E(T_n)=n/p$ e $Var(T_n)=n(1-p)/p^2$

e per la legge dei grandi numeri, per n grande T_n/n è molto vicino a 1/p, che è valore atteso di ciascun D_i

DIMOSTRAZIONE caso n=2

OVVIAMENTE $P(D_1=k)=P(T_1=k)=(1-p)^{k-1} p$ per $k \geq 1$

per k_1, $k_2 \geq 1$, si ha

$P(D_1=k_1, D_2=k_2)$

$=P(A_1^c ...A_{k_1-1} A_{k_1} A_{k_1+1^c ... A_{k_1+k_2-1}^c A_{k_1+k_2})=$

$=P(A_1^c)...P(A_{k_1-1}) P(A_{k_1}) P(A_{k_1+1^c) ... P(A_{k_1+k_2-1}^c) P(A_{k_1+k_2})=$

$= (1-p)^{k_1-1} p (1-p)^{k_2-1} p$

$= P(D_1=k_1) (1-p)^{k_2-1} p$

quindi

saturando rispetto a k_1 (cioè sommando rispetto a k_1) si ottiene

$P(D_2=k_2)= \sum_{k_1} P(D_1=k_1, D_2=k_2)= \sum_{k_1}P(D_1=k_1) (1-p)^{k_2-1} p = 1 P(T_1=k_2)$

e quindi oltre a D_1 anche D_2 è geometrica di parametro p e inoltre

da $P(D_1=k_1, D_2=k_2) = P(D_1=k_1) P(D_2=k_2)$

si ha che D_1 e D_2 sono indipendenti

OVVIAMENTE $T_2=D_1+D_2$

quindi

$E(T_2)=E(D_1)+E(D_2)=1/p+1/p=2/p$

ed essendo D_1 e D_2 INDIPENDENTI e quindi SCORRELATE

sia ha

$Var(T_2)=Var(D_1)+Var(D_2)+2Cov(D_1,D_2)=(1-p)/p^2+ (1-p)/p^2+0 = 2(1-p)/p^2$

per n generico si ha

$P(D_1=k_1, D_2=k_2,...., D_n=k_n)$

$=P(A_1^c ...A_{k_1-1} A_{k_1} A_{k_1+1^c ... A_{k_1+k_2-1}^c A_{k_1+k_2}...$

$... A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+1}^c A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+2}^c ...$

$... A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+k_n-1}^c A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+k_n})$

$=P(A_1^c)...P(A_{k_1-1}) P(A_{k_1}) P(A_{k_1+1^c) ... P(A_{k_1+k_2-1}^c) P(A_{k_1+k_2})...$

$... P(A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+1}^c) P(A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+2}^c) ...$

$... P(A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+k_n-1}^c) P(A_{k_1+k_2+...k_{n-1}+k_n})$

$= (1-p)^{k_1-1} p (1-p)^{k_2-1} p .... (1-p)^{k_{n-1}-1} p (1-p)^{k_n-1} p$

(a questo punto si ragiona per induzione= se abbiamo già dimostrato che $P(D_i=k_i)= (1-p)^{k_i-1} p$ per $i=1,2,...,n-1$

allora $P(D_1=k_1, D_2=k_2,...., D_n=k_n)$

$= P(D_1=k_1) P(D_2=k_2)...P(D_{n-1}=k_{n-1}) (1-p)^{k_n-1} p$

e come nel caso n=2, sommando su $k_1,...,k_{n-1}$ si ottiene che $P(D_n=k_n)= 1-p)^{k_n-1} p =P(T_1=k_n)$ e che

le variabili aleatorie $D_1, D_2, ...,D_n$ sono indipendenti,

nel senso che

la densità discreta congiunta $p_{D_1,D_2,...,D_n}(k_1,k_2,...,k_n)=p_{D_1}(k_1) p_{D_2}(k_2)..... p_{D_n}(k_n)$

ovvero

$P(D_1=k_1, D_2=k_2,...., D_n=k_n)= P(D_1=k_1) P(D_2=k_2).... P(D_n=k_n)$

OVVIAMENTE $T_n =D_1+D_2 +...+D_n$

quindi, come nel caso n=2 si ha

$E(T_n) = E(D_1+D_2 +...+D_n)= E(D_1)+E(D_2) +...+E(D_n)=n/p$

$Var (T_n) =Var(D_1+D_2 +...+D_n)=Var (D_1)+Var(D_2) +...+Var(D_n)=n(1-p)/p^2$

in quanto D_i e D_j sono INDIPENDENTI e quindi $Cov(D_i,D_j)=0$

ESERCIZIO

Con le notazioni precedenti, sia $p=1/3$ e T_n il tempo di n-simo successo.

Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un n tale che

$P(|T_n/n-3|> 2/10) \leq 1/10$

SOLUZIONE

Osservando che $E(T_n/n)=np/n=p = 3$ in questo caso e che $Var(T_n/n) =(1/n)^2 n (1-p)/p^2= 6/n$

(attenzione c'era un errore di conto: per $p=1/3$ $(1-p)/p^2=6$ e NON 12)

possiamo affermare (grazie alla disuguaglianza di Chebyshev)

che

$P(|T_n/n-3|> 2/10) \leq 6/(n (2/10)^2) = (1/n) 6 (100/4) = 150/n$

e quindi SE $150/n \leq 1/10$ ossia se $1500 \leq n$ ovvero (e MEGLIO) SE $n \geq 1500$

possiamo affermare che $P(|T_n/n-3|> 2/10) \leq 1/10$

ovvero che $P(2,8 \leq T_n/n\leq 3,2) \geq 9/10$.

ESEMPIO per arrivare alla FORMULA DEL VALORE ATTESO "TOTALE"

Come nell'esercizio 2 dell'esonero di aprile 2013

ci sono tre urne

urna 1 con 3 palline bianche e tre rosse

urna 2 con 2 palline bianche e 4 rosse

urna 3 con 4 palline rosse

Si lancia una moneta ben equilibrata, e, se esce testa si sceglie l'urna 1, se esce croce si lancia di nuovo la moneta e, se esce testa si sceglie l'urna 2 e altrimenti si sceglie l'urna 3.

DALL'URNA SCELTA si estraggono CON REISERIMENTO 4 palline.

Sia X_R il numero di palline rosse estratte con questo meccanismo:

1. Calcolare P(X_R=k), per i valori per cui viene positiva

2. Calcolare E(X_R)

SOLUZIONE

Posto U_i={viene scelta l'urna i} si ha che U_1, U_2 U_3 formano una partizione dell'evento certo con

P(U_1)=P("esce testaal primo lancio")=1/2 mentre P(U_2)=P("esce croce al primo lancio e testa al secondo lancio")=1/4 e P(U_3)=1/4 (1-P(U_1)-P(U_2))

Per la formula delle probabilità totali si ha

P(X_R=k)=P(U_1)P(X_R=k|U_1)+P(U_2)P(X_R=k|U_2) +P(U_3)P(X_R=k|U_3).

Chiaramente, se conosco l'urna posso dire che, essendo estrazioni con reinserimento,

P(X_R=k|U_1)= C^4_k (p_1)^k (1-p_1)^{4-k} dove p_1=3/6=1/2, per k=0,1,...,4

P(X_R=k|U_2)= C^4_k (p_2)^k (1-p_2)^{4-k} dove p_2=4/6=2/3, per k=0,1,...,4

P(X_R=k|U_3)= C^4_k (p_3)^k (1-p_3)^{4-k} dove p_3=6/6=1, per k=0,1,...,4

ovvero

P(X_R=k|U_2)=0 , per k=0,1,...,3 e P(X_R=4|U_2)=1

per cui

P(X_R=4)= P(U_1)P(X_R=4|U_1)+P(U_2)P(X_R=4|U_2) +P(U_3)P(X_R=4|U_3)

=(1/2) $(1/2)^4$ + (1/4) $(2/3)^4$ + (1/4) 1= 1/32+16/(4·81)+1/4= (81+128+648) /(32·81)

P(X_R=3)= P(U_1)P(X_R=3|U_1)+P(U_2)P(X_R=3|U_2) +P(U_3)P(X_R=3|U_3)

=(1/2) 4 $(1/2)^4$ + (1/4) 4 $(1/3)^1(2/3)^3$ + (1/4) 0 = 1/8 + 8/81= (81+64)/(8·81)

E ANALOGAMENTE

P(X_R=2)= P(U_1)P(X_R=2|U_1)+P(U_2)P(X_R=2|U_2) +P(U_3)P(X_R=2|U_3)

=(1/2) 6 $(1/2)^4$ + (1/4) 6 $(1/3)^2(2/3)^2$ + (1/4) 0= 3/16+ 12/(2·81)=(3·81+12·8)/(16·81)

etc.

Svolgere tutti i conti non è agevole, anche se possibile e ancora meno agevole è usare la semplice definizione di valore atteso per calcolare E(X),

ossia E(X)=0 P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)

Fortunatamente ci sono dei modi che ci permettono di ovviare a questo problema.

2. CALCOLO ALTERNATIVO DEL VALORE ATTESO:

dall'espressione

E(X)=0 P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)=

= 0 [P(U_1)P(X_R=0|U_1) +P(U_2)P(X_R=0|U_2) + P(U_3)P(X_R=0|U_3)]

+1 [P(U_1)P(X_R=1|U_1) +P(U_2)P(X_R=1|U_2) + P(U_3)P(X_R=1|U_3)]

+2 [P(U_1)P(X_R=2|U_1) +P(U_2)P(X_R=2|U_2) + P(U_3)P(X_R=2|U_3)]

+3 [P(U_1)P(X_R=3|U_1) +P(U_2)P(X_R=3|U_2) + P(U_3)P(X_R=3|U_3)]

+4 [P(U_1)P(X_R=4|U_1) +P(U_2)P(X_R=4|U_2) + P(U_3)P(X_R=4|U_3)]=

= 0 P(U_1)P(X_R=0|U_1) + 0 P(U_2)P(X_R=0|U_2) +0 P(U_3)P(X_R=0|U_3)

+1 P(U_1)P(X_R=1|U_1) + 1 P(U_2)P(X_R=1|U_2) +1 P(U_3)P(X_R=1|U_3)

+2 P(U_1)P(X_R=2|U_1) + 2 P(U_2)P(X_R=2|U_2) + 2 P(U_3)P(X_R=2|U_3)

+3 P(U_1)P(X_R=3|U_1) + 3P(U_2)P(X_R=3|U_2) + 3 P(U_3)P(X_R=3|U_3)

+4 P(U_1)P(X_R=4|U_1) + 4 P(U_2)P(X_R=4|U_2) + 4 P(U_3)P(X_R=4|U_3)

E SOMMANDO SULLE COLONNE (ossia cambiano l'ordine di sommatoria)

otteniamo che

E(X)=

P(U_1) [0 P(X_R=0|U_1) +1 P(X_R=1|U_1) +2 P(X_R=2|U_1) +3 P(X_R=3|U_1) +4 P(X_R=4|U_1)]

+

P(U_2) [0 P(X_R=0|U_2) +1 P(X_R=1|U_2) +2 P(X_R=2|U_2) +3 P(X_R=3|U_2) +4 P(X_R=4|U_2)]

+

P(U_3) [0 P(X_R=0|U_3) +1 P(X_R=1|U_3) +2 P(X_R=2|U_3) +3 P(X_R=3|U_3) +4 P(X_R=4|U_3)]

= P(U_1) E(X_R|U_1)+ P(U_2) E(X_R|U_2)+ P(U_3) E(X_R|U_3)

dove E(X_R|U_i) è valore atteso di X_R fatto rispetto alla probabilità condizionata P(.|U_i)

ossia

E(X_R|U_i) = ∑_{k=0,...4} k P(X_R=k|U_i)

QUESTI VALORI ATTESI SI SANNO CALCOLARE MOLTO FACILMENTE perché sappiamo che

$P(X_R=k|U_i)=C^4_k (p_i)^k (1-p_i)^{4-k}$ (ossia, condizionatamente a U_i X_R è una Bin(4,p_i)

dove $p_1=3/6=1/2$, $p_2=4/6=2/3$ e dove $p_3=6/6=1$

e quindi sappiamo che

$E(X_R|U_i) = \sum_{k=0,...4} k P(X_R=k|U_i)=4 p_i$

e alla fine otteniamo

$E(X)= P(U_1) E(X_R|U_1)+ P(U_2) E(X_R|U_2)+ P(U_3) E(X_R|U_3)=$

$=(1/2) 4 (1/2) + (1/4) 4 (2/3) + (1/4) 4 \cdot 1 =8/3$

QUESTA FORMULA SI GENERALIZZA:

FORMULA DEL VALORE ATTESO "TOTALE"

tutte le volte che esiste una partizione (dell'evento certo) $H_1, H_2, ... ,H_m$

e che è lecito calcolare

$P(X=x_k)= \sum_{i=1,..m}P(H_i) P(X=x_k| H_i)$

si ha che, posto

$E(X|H_i) = \sum_{k} x_k P(X=x_k| H_i)$

allora

$E(X) = \sum_{i=1,..m} P(H_i) E(X | H_i)$

DIMOSTRAZIONE (caso discreto finito) Infatti

$E(X) = \sum_{k} x_k P(X=x_k) = \sum_{k} x_k \sum_{i=1,..m}P(H_i) P(X=x_k| H_i)=$ *(scambiando le somme)*

$= \sum_{i=1,..m} \sum_{k} x_k P(H_i) P(X=x_k| H_i) =$

(osservando che $P(H_i)$ non dipende da k e quindi $\sum_{k} x_k P(H_i) P(X=x_k| H_i) = P(H_i) \sum_{k} x_k P(X=x_k| H_i)$)

$= \sum_{i=1,..m} P(H_i) \sum_{k} x_k P(X=x_k| H_i) = \sum_{i=1,..m} P(H_i) \sum_{k} x_k E(X| H_i)$

IN realtà in questo caso c'è un altro modo ancora più semplice:

si osserva che

$X_R=1I_{R_1}+1I_{R_2}+1I_{R_3}+1I_{R_4}$ (dove R_i="i-sima pallina estratta rossa")

da cui

$E(X_R)=E(1I_{R_1}) +E(1I_{R_2}) + E(1I_{R_3}) + E(1I_{R_4}) =$

$=P(R_1)+P(R_2)+ P(R_3)+P(R_4) = 4 P(R_1) =8/3$

in quanto

$P(R_k)= P(U_1) P(R_k|U_1)+ P(U_2) P(R_k|U_2)+ P(U_3) P(R_k|U_3) =$

$P(U_1)p_1 + P(U_2) p_2 + P(U_3) p_3 = (1/2) (1/2) + (1/4) (2/3) + (1/4) 1 = 8/12$

E QUINDI $P(R_k)=P(R_1)=8/12$.

RIPETERE QUESTO ESEMPIO AL CASO DI ESTRAZIONI SENZA REINSERIMENTO:

si ottiene che, anche in tale caso, il valore atteso del numero di palline rosse estratte vale 8/3 in quanto il valore atteso di una Ipergeometrica è lo stesso di una binomiale con lo stesso numero di estrazioni e con la stessa composizione dell'urna:

ad esempio se Y_B = # palline bianche estratte in n estrazioni SENZA reinserimento da un'urna che contiene b+r palline di cui b bianche ed r rosse, allora il suo valore atteso vale "np", dove p=b/(b+r) , che è lo stesso che nel caso di X_B=# di palline bianche estratte in n estrazione CON reinserimento da un'urna con la stessa composizione,

ma, ovviamente, la densità discreta della v.a. numero di palline estratte senza reinserimento è diversa da quella con estrazioni CON reinserimento!!!

33) lunedì 27 maggio 2013

ESERCIZIO 2 del 2° esonero 6 giugno 2012

e generalizzazione della formula del valore atteso "totale" :

$E[g(X)] = \sum_{i=1,..m} P(H_i) E[g(X) | H_i]$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE: Se X è una variabile aleatoria continua

con densità di probabilità $f_X(x)$ e con funzione di distribuzione $F_X(x)=P(X \leq x)$

si ha che

$E[g(X)] = \int_{(-\infty, +\infty)} g(x) f_X(x) dx,$

purché $\int_{(-\infty, +\infty)} |g(x)|\ f_X(x)\ dx$ sia finito.

APPROSSIMAZIONE CON v.a. CONTINUE, significato

Sia U_n UNIFORME in $\{1,2,....,n\}$ e sia $X_n=1/n$ e quindi UNIFORME in $\{i/n, i=1,2,...n\}$

SI HA CHE

X_n è "vicina" alla uniforme (continua) nell'intervallo (0,1)

nel senso che $P(X_n \le x)=F_{X_n}(x)$ **è vicina** a $P(U\le x)=F_U(x)$,

dove U è UNIFORME (CONTINUA) IN (0,1)

nel senso che $P(X_n \le x)=F_{X_n}(x)$ tende, per n che tende ad infinito, a $P(U\le x)=F_U(x)$.

Infatti

per $x<0$ si ha $P(X_n \le x)=F_{X_n}(x) = P(U\le x)=F_U(x) =0$

per $x\ge 1$ si ha $P(X_n \le x)=F_{X_n}(x) = P(U\le x)=F_U(x) =1$

per $0 \le x < 1$ si ha

$\{X_n \le x\} = \#(i: i/n\le x)/n$

e quindi

per $k/n \le x < (k+1)/n$ (con $k=0,1,....,n-1$), si ha

$P(X_n \le x)=F_{X_n}(x) = k/n$ e $P(U\le x)=F_U(x) =x$

e chiaramente per $k/n \le x < (k+1)/n$ si ha $F_U(x)- F_{X_n}(x)=x-k/n$ e $0 \le x-k/n <1/n$

RIASSUMENDO

$0 \le F_U(x)- F_{X_n}(x) < 1/n$ (che tende a zero per n che tende ad infinito)

D'altra parte per ogni funzione g continua, si ha

$E[g(X_n)] = \sum_{i=1,..,n} g(i/n)\ P(X_n=i/n) = \sum_{i=1,..,n} g(i/n)\ (1/n)= \sum_{i=1,..,n} g(i/n)\ [(i+1/n)-(i/n)]$

che è vicino a

$\int_{(0,1)} g(x)\ dx = \int_{(-\infty, +\infty)} g(x)\ f_U(x)\ dx$

[ricordiamo che $f_U(x)=0$ per $x<0$, $f_U(x)=1$ per $0<x<1$ ed $f_U(x)=0$ per $x>1$]

Più in generale se X_n è una successione di variabili aleatorie discrete a valori in $X_n(\Omega)=\{x^n_k, k=,1,2,...\}$

con $x^n_k < x^n_{k+1}$

e X è una variabile aleatoria continua con densità di probabilità $f_X(x)$ e con $F_X(x)$ e $F_{X_n}(x)$ "vicine"

(in simboli $F_X(x) \cong F_{X_n}(x)$)

allora, se $\underline{y}^n_k$ è una successione tale che $x^n_{k-1} < \underline{y}^n_k < x^n_k < \underline{y}^n_{k+1} < x^n_{k+1}$

possiamo dire che

$P(X_n= x^n_k)= F_{X_n} (\underline{y}^n_{k+1}) - F_{X_n} (\underline{y}^n_k) \cong F_X (\underline{y}^n_{k+1}) - F_X (\underline{y}^n_k)$

e inoltre, tenendo conto che

$F_X (\underline{y}^n_{k+1}) - F_X (\underline{y}^n_k) = \int_{(\underline{y}^n_k, \underline{y}^n_{k+1})} f_X(x)\, dx \cong f_X(x^n_k) [\underline{y}^n_{k+1} - \underline{y}^n_k]$

possiamo dire che

$P(X_n= x^n_k) \cong f_X(x^n_k) [\underline{y}^n_{k+1} - \underline{y}^n_k]$

INFINE QUINDI

$E[g(X_n)])= \sum_{k\geq 1} g(x^n_k) P(X_n= x^n_k) = \sum_{k\geq 1} g(x^n_k) [F_{X_n} (\underline{y}^n_{k+1}) - F_{X_n} (\underline{y}^n_k)]$

$\cong \sum_{k\geq 1} g(x^n_k) f_X(x^n_k) [\underline{y}^n_{k+1} - \underline{y}^n_k] \cong \int_{(-\infty, +\infty)} g(x) f_X(x)\, dx.$

OPPURE (NON SVOLTO A LEZIONE)

se $T(n)$ è una GEOMETRICA (λ/n) allora $T(n)/n$ è vicina ad una esponenziale,

nel senso che $P(T(n)/n \leq x)=F_{T(n)/n}(x)$ è vicina (tende, per n che tende ad infinito) a $P(X\leq x)=F_X(x)$

dove X è una v.a. $EXP(\lambda)$ (con $\lambda >0$)

INFATTI equivalentemente mostriamo che

$P(T(n)/n>x) =1 = P(X>x)$ per x negativo o nullo,

mentre , per x positivo,

posto $[y]$= parte intera di y, ossia il più grande intero minore o uguale a y, cioè $[y]=k$ se e solo se $k \leq y<k+1$

$P(T(n)/n>x)= P(T(n)>xn)= P(T(n)>[nx]) =(1-\lambda/n)^{[nx]} =(1-\lambda/n)^{n\,[nx]/n} =\{(1-\lambda/n)^n\}^{[nx]/n} \cong \{e^{-\lambda}\}^x= e^{-\lambda x}$

(in quanto per n che tende ad infinito $(1-\lambda/n)^n$ tende a $e^{-\lambda}$, e inoltre $[nx]/n$ converge a x: $0 \leq x- [nx]/n= (nx-[nx])/n\leq 1/n$)

e QUINDI per $0<a <b$ si ha che

$P(a< T(n)/n \leq b) = P(na< T(n) \leq nb)$

si può approssimare con

$F_X(b)-F_X(a)=1-\exp\{-b\} - (1-\exp\{-a\})= \exp\{-a\}-\exp\{-b\}$

DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD

PROPRIETA', media e varianza, e USO DELLE TAVOLE

$Z \sim N(0,1)$ Gaussiana (o Normale) Standard e $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ Gaussiana di media μ e varianza σ^2,

Oss: Se $Z \sim N(0,1)$ allora la v.a. $\mu+\sigma Z$ ha valore medio μ e varianza σ^2,

inoltre (senza dim) $\mu+\sigma Z \sim N(\mu,\sigma^2)$

Uso delle tavole della GAUSSIANA per il calcolo della funzione di distribuzione di una gaussiana standard

$\Phi(x):= \left(1/ (2 \pi)^{1/2}\right) \int_{(-\infty,x]} \exp(-y^2/2)\, dy$, utilizzando il fatto che

$\Phi(-x):= 1-\Phi(x)$

34) mercoledì 29 maggio 2013

Una variabile aleatoria Y è una v.a. STANDARD se E(Y)=0 e Var(Y)=1

STANDARDIZZARE una variabile aleatoria X con valore atteso $E(X)= \mu$ e varianza $Var(X)=\sigma^2$ finiti con $\sigma^2 >0$

significa considerare la v.a. $X^*=(X-\mu)/ \sigma =(X- E(X))/ (Var(X))^{1/2}$:

in modo che X* è una trasformazione affine (cioè del tipo X*=aX+b) e a e b sono scelti in modo tale che X* sia una v.a. STANDARD

Ad esempio posto S_n= numero di successi in n prove ripetute (cioè in un o schema di Bernoulli) allora

$S_n^*= (S_n - np) / (n p (1-p))^{1/2}$

DEFINIZIONE GENERALE DI DUE VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

X e Y sono v.a. indipendenti se per ogni coppia di intervalli I e J, finiti o infiniti, aperti o chiusi,

$P(X \in I, Y\in J)=P(X\in I)\, P(Y\in J)$

DEFINIZIONE GENERALE DI TRE VARIABILI ALEATORIE (GLOBALMENTE) INDIPENDENTI

X_1 , X_2 e X_3 sono v.a. (globalmente) indipendenti se per ogni terna di intervalli I_1, I_2 e I_3, finiti o infiniti, aperti o chiusi,

$P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, X_3 \in I_3)=P(X_1 \in I_1) P(X_2 \in I_2)P(X_3 \in I_3)$

OSSERVAZIONE se X_1 , X_2 e X_3 sono v.a. (globalmente) indipendenti, allora anche le v.a. X_1 e X_3 sono indipendenti: infatti basta prendere $I_2 =IR=(-\infty, +\infty)$ e osservare che

$P(X_1 \in I_1, X_3 \in I_3)=P(X_1\in I_1, X_2 \in(-\infty, +\infty), X_3\in I_3)=P(X_1\in I_1) P(X_2 \in(-\infty, +\infty))P(X_3 \in I_3)=P(X_1 \in I_1) P(X_3 \in I_3)$

[Chiaramente lo stesso vale per le v.a. X_1 e X_2 e per le v.a. X_2 e X_3]

DEFINIZIONE GENERALE DI n VARIABILI ALEATORIE (GLOBALMENTE) INDIPENDENTI

X_1 , X_2, ... , X_n sono v.a. (globalmente) indipendenti se per ogni n-pla di intervalli I_1, I_2,..,I_n, finiti o infiniti, aperti o chiusi,

$P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2,..., X_n \in I_n)=P(X_1 \in I_1) P(X_2 \in I_2) ... P(X_n \in I_n)$

OSSERVAZIONE se X_1 , X_2 ,..., X_n sono v.a. (globalmente) indipendenti, allora per ogni $k \leq n$ e per ogni $\{j_1,...,j_k\}$ le v.a. X_j_1 , X_j_2 ,..., X_j_k sono indipendenti, in particolare sono indipendenti a due a due, ossia per ogni $i \neq j$ (con $1\leq i,j \leq n$) le v.a. X_i e X_j sono indipendenti.

Per v.a. DISCRETE significa che $P(X_1 =\xi_1, X_2=\xi_2,..., X_n =\xi_n)=P(X_1 =\xi_1) P(X_2=\xi_2) ... P(X_n =\xi_n)$

per ogni $\xi_j\in X_j(\Omega)$ (j=1,2,...,n),

DEFINIZIONE DI UNA SUCCESSIONE DI v.a. $\{X_m\}_{m\geq 1}$ GLOBALMENTE INDIPENDENTI:

per ogni $n\geq 2$, X_1 , X_2 ,..., X_n sono v.a. (globalmente) indipendenti.

OSSERVAZIONE se $\{X_m\}_{m\geq 1}$ sono GLOBALMENTE INDIPENDENTI allora lo sono a due a due, cioè per ogni $i \neq j$ le v.a. X_i e X_j sono indipendenti, allora sono non correlate (cioè $Cov (X_i , X_j)=0$) e allora

$Var (\Sigma_{j=1,..., n} X_j)= \Sigma_{j=1,..., n} Var(X_j) + 2 \Sigma_{1\leq i < j \leq n} Cov (X_i , X_j)=\Sigma_{j=1,..., n} Var(X_j) + 0$

per cui se $\{X_m\}_{m\geq 1}$ è una successione di v.a. GLOBALMENTE INDIPENDENTI e tutte con la stessa legge e se esistono finiti

$E(X_i)= \mu_X$, e $Var(X_i)= \sigma^2_X$ ALLORA , posto $S_n= \Sigma_{j=1,..., n} X_j$

$E(S_n)=E(\Sigma_{j=1,..., n} X_j)= n \mu_X$

$Var (S_n)=Var (\Sigma_{j=1,..., n} X_j)= n \sigma^2_X$

Inoltre sotto queste condizioni vale la legge dei grandi numeri

---

ENUNCIATO DEL TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE e APPLICAZIONI

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE se $\{X_m\}_{m\geq 1}$ è una successione di v.a. GLOBALEMENTE INDIPENDENTI e tutte con la stessa legge e se esistono finiti $E(X_i)= \mu_X$, e $Var(X_i)= \sigma^2_X$, con $\sigma^2_X>0$

allora per ogni a<b (a e b possono assumere i valori $-\infty$ **e** $+\infty$)

$\lim_{n\to\infty} P(a< S^*_n \leq b)= \Phi(b) - \Phi(a) = \left(1/ (2\pi)^{1/2}\right) \int_{(a,b]} \exp(-y^2/2)\, dy \left(= P(a<Z\leq b) \text{ per } Z \sim N(0,1)\right)$

uniformemente in a e b

ossia esiste una successione e_n, tale che $0\leq e_n$ e $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ con

$\sup_{a<b} | \Phi(b) - \Phi(a) - P(a< S^*_n \leq b) | \leq e_n$.

N.B. $\Phi(+\infty) =1$ $\Phi(-\infty) = 0$, QUINDI

per $a=-\infty$, $\lim_{n\to\infty} P(-\infty< S^*_n \leq b)= \lim_{n\to\infty} P(S^*_n \leq b)= \Phi(b)$

e per $b= +\infty$, $\lim_{n\to\infty} P(a< S^*_n \leq +\infty)= \lim_{n\to\infty} P(a< S^*_n)= 1 - \Phi(a)$

INOLTRE $S^*_n = \left(S_n - E(S_n)\right)/\left(Var (S_n)\right)^{1/2}= \left(S_n - n\mu_X\right)/\left(n \sigma^2_X\right)^{1/2}$

è una v.a. standard (cioè a valore atteso nullo e varianza 1, così come lo è $Z \sim N(0,1)$

Applicazioni della **Approssimazione normale (o gaussiana)** della distribuzione della somma di v.a. indipendenti identicamente distribuite [con valore medio e varianza finiti] in esempi specifici.

APPROSSIMAZIONE NORMALE

$\alpha< S_n \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - n\mu_X < S_n - n\mu_X \leq \beta - n\mu_X \Leftrightarrow (\alpha - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2} < (S_n - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2} \leq (\beta - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2}$

e quindi

$P(\alpha< S_n \leq \beta)= P(a_n< S^*_n \leq b_n)$,

dove $a_n=\left(\alpha - n\mu_X\right)/\left(n \sigma^2_X\right)^{1/2}$ e $b_n=\left(\beta - n\mu_X\right)/\left(n \sigma^2_X\right)^{1/2}$.

DI CONSEGUENZA, PER IL TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE

$P(\alpha< S_n \leq \beta)= P(a_n< S^*_n \leq b_n) \cong \Phi(b_n) - \Phi(a_n)$ ossia

$P(\alpha< S_n \leq \beta)= P\left((\alpha - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2} < S^*_n \leq (\beta - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2}\right)$

$\cong \Phi\left((\alpha - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2}\right) - \Phi\left((\beta - n\mu_X)/(n \sigma^2_X)^{1/2}\right)$

NOTA BENE: LA STESSA APPROSSIMAZONE VALE se, invece di $P(\alpha < S_n \leq \beta)$

si considera $P(\alpha \leq S_n \leq \beta)$ oppure $P(\alpha < S_n < \beta)$ o anche $P(\alpha \leq S_n < \beta)$

Caso della distribuzione del tempo di n-simo successo $T^{(n)}$, che si può vedere come somma di v.a. geometriche indipendenti, tutte con lo stesso parametro p, (*$T^{(n)}$ = D_1+D_2+....+D_n, dove D_i sono gli intertempi tra un successo e l'altro e che sono variabili aleatorie indipendenti e tutte GEOMETRICHE di parametro p*) quindi

$$T^{(n)} \leq y \iff \left(T^{(n)} - E(T^{(n)})\right) / \left(\mathrm{Var}\,(T^{(n)})\right)^{1/2} \leq \left(y - E(T^{(n)})\right) / \left(\mathrm{Var}\,(T^{(n)})\right)^{1/2} \iff P(T^{(n)} - n/p \leq y - n/p)$$

$$= (T^{(n)} - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2} \leq (y - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2} \qquad \text{(dove } q=1-p\text{)}$$

e quindi

$$P(T^{(n)} \leq y) = P\left((T^{(n)} - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2} \leq (y - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2} \right) \cong \Phi(x_n(y))$$

dove $x_n(y) = (y - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2} = (py - n)/(n\, q)^{1/2}$

OSSERVAZIONE (non fatta a lezione) *: SI PUO' OTTENERE UNA APPROSSIMAZIONE MIGLIORE osservando che, per y=k intero*

$T^{(n)} \leq k \iff T^{(n)} \leq k + 1/2$ *e quindi*

$P(T^{(n)} \leq k) \cong \Phi(x_n(k + 1/2))$

dove $x_n(k+ 1/2) = (k+ 1/2 - n/p)/(n\, q/p^2)^{1/2}$

CASO di una variabile aleatoria X con distribuzione di POISSON di parametro λ, con λ molto grande .

L'idea è che si può pensare X come la somma di n v.a. indipendenti tutte di parametro λ /n

o meglio, se X_i sono v.a. indipendenti di parametro λ /n allora $S_n = \Sigma_{j=1,\dots,n} X_j$ ha distribuzione di POISSON di parametro dato dalla somma dei parametri, e quindi $n\ \lambda /n = \lambda$. Quindi

$$P(X \leq x) = P(S_n \leq x) = P\left(S^*_n \leq (x - n\,\lambda /n)/(n\ \lambda /n)^{1/2} \right) = P\left(S^*_n \leq (x - \lambda)/(\lambda)^{1/2} \right) \cong \Phi((x - \lambda)/(\lambda)^{1/2})$$

OSSERVAZIONE (non fatta a lezione) *anche qui, sex= k e' intero allora una approssimazione migliore si ottiene osservando che*

$$P(X \leq k) = P(X \leq k+1/2) = P\left(S^*_n \leq (k+1/2 - n\,\lambda /n)/(n\ \lambda /n)^{1/2} \right) = P\left(S^*_n \leq (k+1/2 - \lambda)/(\lambda)^{1/2} \right)$$

$$\cong \Phi((k+1/2 - \lambda)/(\lambda)^{1/2})$$

Legge dei grandi numeri attraverso il teorema centrale del limite.

Esempi di calcolo approssimato di

$P(|\Sigma_{j=1,\dots,n} X_j /n - \mu_X| < \varepsilon) = P(|S_n /n - \mu_X| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < S_n /n - \mu_X < \varepsilon)$

$= P(-\varepsilon < (S_n - n\mu_X)/n < \varepsilon) = P(-(n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon < (n/\sigma^2_X)^{1/2}(S_n - n\mu_X)/n < (n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon)$

$= P(-(n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon < (S_n - n\mu_X)/(n/\sigma^2_X)^{1/2} < (n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon)$

$= P(-(n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon < S^*_n < (n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon) \cong \Phi\left((n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon\right) - \Phi\left(-(n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon\right) =$

$= 2\,\Phi\left((n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon\right) - 1$

Si osservi che, per n che tende ad infinito, $2\,\Phi\left((n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon\right) - 1$ converge a $2 \cdot 1 - 1 = 1$

quindi possiamo affermare che quindi

$P(|\Sigma_{j=1,\dots,n} X_j /n - \mu_X| < \varepsilon) \cong 2\,\Phi\left((n/\sigma^2_X)^{1/2}\varepsilon\right) - 1 \cong 1$

RIPRENDIAMO il seguente esercizio:

ESERCIZIO (a lezione svolto un esercizio simile)

Sia T_n il tempo di n-simo successo in prove indipendenti e tutte con probabilità p=1/3.

Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un n tale che

$P(|T_n/n-3| > 2/10) \leq 1/10$ ovvero trovare n tale che $P(|T_n/n-3| \leq 2/10) \geq 1-1/10$

SOLUZIONE (GIA' VISTA, con la disuguaglianza di Chebyshev)

Osservando che E(T_n/n)=np/n=p = 3 in questo caso e che Var(T_n/n) =(1/n)^2 n (1-p)/p^2= 6/n

[*ottenuto notando che T_n= D_1+D_2+....+D_n, dove D_i sono gli intertempi tra un successo e l'altro e che sono variabili aleatorie indipendenti e tutte GEOMETRICHE di parametro p=1/3*]

possiamo affermare (grazie alla disuguaglianza di Chebyshev) che

$P(|T_n/n-3| > 2/10) \leq 6/(n\,(2/10)^2) = (1/n)\ 6\,(100/4) = 150/n$

e quindi SE $150/n \leq 1/10$ ossia se $1500 \leq n$ ovvero (e MEGLIO) SE $n \geq 1500$

possiamo affermare che $P(|T_n/n-3| > 2/10) \leq 1/10$

ovvero che $P(2{,}8 \leq T_n/n \leq 3{,}2) \geq 9/10$.

SOLUZIONE ALTERNATIVA CON L'APPROSSIMAZIONE NORMALE (non svolto a lezione)

Ricordando che T_n= D_1+D_2+....+D_n, *dove D_i sono gli intertempi tra un successo e l'altro e che sono variabili aleatorie indipendenti,* e quindi con E(D_i)= μ_D=1/p=3 e con Var(D_i)= σ^2_D =(1-p)/p^2=6 possiamo osservare che

P(|T_n/n-3|> 2/10) = 1 - P(|T_n/n-3|$\leq$ 2/10) = 1-P(|(D_1+...+D_n)/n - μ_D |$\leq \varepsilon$) per ε= 2/10

ossia, per ε= 2/10,

P(|T_n/n-3|$\leq$ 2/10)) = P(|(D_1+...+D_n)/n - μ_D |$\leq \varepsilon$) $\cong$ 2 $\Phi\big($ $(n/\sigma^2_D)^{1/2}\,\varepsilon$ $\big)$-1 = 2 $\Phi\big($ $(n/6)^{1/2}$ (2/10) $\big)$] -1

Se ora troviamo un **x** tale che 2 Φ(**x**) -1 $\geq$ 1-1/10, ossia 2 Φ(**x**) $\geq$ 2-1/10 $\Leftrightarrow$ Φ(**x**) $\geq$ 1-1/20

(meglio se si trova un **x** tale che Φ(**x**) = 1-1/20=0.95)

e se $(n/\sigma^2_D)^{1/2}\,\varepsilon \geq$ **x** (cioè se $(n/\sigma^2_D)\,\varepsilon^2 \geq$ **x**$^2 \Leftrightarrow$ n$\geq$ **x**$^2\,\sigma^2_D{}^2/\varepsilon^2$) allora 2 $\Phi\big($ $(n/6)^{1/2}$ (2/10)-1 $\geq$ 1-1/10

dalla tavola sappiamo che Φ(**1.64**)=0.9495 e Φ(**x**)= Φ(**1.65**)=0.9505

e quindi possiamo prendere **x**=1.65

QUINDI CON L'APPROSSIMAZIONE NORMALE SI TROVA CHE

x$^2\,\sigma^2_D{}^2/\varepsilon^2$ = (1.65)^2 6/(2/10)^2 = 2,7225 600/4 = 408,375 quindi otteniamo n$\geq$408,375

e QUINDI 409 è "approssimativamente" il valore di n che permette di ottenere che

P(|T_n/n-3|$\leq$ 2/10) $\geq$ 9/10 =1-1/10

<u>GENERALIZZAZIONE</u>:

CALCOLO DI n TALE CHE P(|$\Sigma_{j=1,\dots,n}$ X$_j$ /n - μ_X |< ε) $\geq$ 1- δ = β , (ad esempio 1- δ = 0.95)

con la disuguaglianza di Chebyshev P(|$\Sigma_{j=1,\dots,n}$ X$_j$ /n - μ_X |< ε) $\geq$ 1 - $\sigma^2_X/(n\varepsilon^2)$

(BASTA trovare n tale che 1 - $\sigma^2_X/(n\varepsilon^2) > \beta$, cioè δ=1 - $\beta > \sigma^2_X/(n\varepsilon^2)$ ossia n $\geq$ $n_{CH} \geq \sigma^2_X/(\varepsilon^2\,\delta)$

e calcolo approssimato di n TALE CHE P(|$\Sigma_{j=1,\dots,n}$ X$_j$ /n - μ_X |< ε) > 1- δ

con l'Approssimazione gaussiana OSSIA

P(|$\Sigma_{j=1,\dots,n}$ X$_j$ /n - μ_X |< ε) $\cong$ 2 $\Phi\big($ $(n/\sigma^2_X)^{1/2}\,\varepsilon$ $\big)$ - 1 $\geq$ 1- δ.

Posto ξ_δ tale che 2 Φ(ξ_δ) - 1 = 1- δ, ossia tale che Φ(ξ_δ) = 1- δ /2,

conviene prendere n tale che $(n/\sigma^2_X)^{1/2}\,\varepsilon$ sia maggiore o uguale a ξ_δ , cioè

$(n/\sigma^2_X)^{1/2}\,\varepsilon \geq \xi_\delta$, n $\geq$ $n_{Gauss} \geq (\xi_\delta)^2\,\sigma^2_X/\varepsilon^2$

(ATTENZIONE la notazione x_α spesso indica un valore per il quale $\Phi(x_\alpha) = \alpha$ e quindi $\xi_\delta = x_{1-\delta/2}$

Si noti che $n_{CH}/\,n_{Gauss} = (\xi_\delta)^2/\delta = (x_{1-\delta/2})^2/\delta$,

e che se δ =0.05=5/100=1/20 allora $x_{1-\delta/2}$ = $x_{0.975}$ = 1,959964 $\cong$ 1,96 e quindi

n_{CH} / n_{Gauss} = ($x_{1-\delta/2}$)^2 /δ = (1,96)^2 20= 76,82917762592 $\cong$ 76,832

MENTRE PER δ =0.01=1/100 allora $x_{1-\delta/2}$ = $x_{0.995}$ $\cong$ 3,27 e quindi

n_{CH} / n_{Gauss} = ($x_{1-\delta/2}$)^2 /δ = (3,27)^2 100= 1069,29

CIO' MOSTRA CHE LA STIMA OTTENUTA CON L'APPROSSIMAZIONE NORMALE

OSSERVAZIONE (non svolta a lezione): *nel caso in cui si voglia "stimare" il valore della probabilità di un evento con la frequenza si tratta di considerare $X_i=1_{A_i}$ e quindi di stimare "$p=P(A_i)=\mu_X$" ma sembra che serva la conoscenza di p per conoscere $\sigma^2_X=p(1-p)$. Tuttavia va osservato che p(1-p), per p in (0,1) vale al massimo 1/4 (ottenuto per p=1/2) e quindi*

$n_{CH} \geq 1/(4\varepsilon^2 \delta)$ *è sufficiente per ottenere* $n_{CH} \geq \sigma^2_X/(\varepsilon^2 \delta)$ *e quindi che*

$P(|\Sigma_{j=1,\dots,n} X_j /n - p| < \varepsilon) \geq 1- \delta$.

Un discorso simile vale per il calcolo di n_{Gauss}.

suggerire il sito http://web.iku.edu.tr/~eyavuz/8.pdf

35) venerdì 31 maggio 2013

densità discreta di X condizionata ad Y : CASO DELLE MULTINOMIALI e MULTI-IPERGEOMETRICHE

ESEMPI, cenni brevissimi alle catene di Markov

DATE ESAMI

Seconda sessione dal 03/06/2013 al 12/07/2013 (due appelli)

martedì 4 giugno ore 14,30 AULA 1 NEC : SECONDO ESONERO E PRIMO SCRITTO

mercoledì 26 giugno ore 14,30 AULA 1 NEC SECONDO SCRITTO

(prevedo un terzo appello per luglio, data ora e aula, da stabilire)

Terza sessione dal 09/09/2013 al 20/09/2013

DATE DA STABILIRE: (probabilmente martedì 10 settembre ore 14,30)

ulteriore sessione gennaio - febbraio 2014 (due appelli)

sessioni straordinarie (aprile e novembre)