SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Architettura degli Elaboratori
Lez. 6 – ASM: Funzioni ricorsive

Prof. Andrea Sterbini – sterbini@di.uniroma1.it

Argomenti

- **Argomenti della lezione**
  - Definizione di funzioni ricorsive
  - Realizzazione in assembler
  - Trasformazione di una funzione ricorsiva in iterativa
  - Esempi di programmi

Argomenti

- **Argomenti della lezione**
  - Definizione di funzioni ricorsive
  - Realizzazione in assembler
  - Trasformazione di una funzione ricorsiva in iterativa
  - Esempi di programmi

- **Funzione / procedura ricorsiva:**

funzione che richiama, anche indirettamente, se stessa

Soluzioni ricorsive di problemi

- **Quando si può usare una funzione ricorsiva per risolvere un problema?**

- se **esiste una soluzione conosciuta** per lo stesso problema di «piccole» dimensioni
  - da questa ricaviamo il **caso base** della funzione

- e se esiste un modo di ottenere la soluzione di un problema di dimensione maggiore **a partire dalla soluzione dello stesso problema di dimensione minore**
  - da questa definizione ricaviamo il **caso ricorsivo**, che è formato da 3 parti:
    - **riduzione** del problema in problemi «più piccoli»
    - **chiamata ricorsiva** della funzione per risolvere i casi «più piccoli»
    - elaborazione delle soluzioni «piccole» per ottenere la **soluzione del problema originale**

Esempio

Funzione fattoriale

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Definizione ricorsiva:

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Definizione ricorsiva:

caso base: «il fattoriale di 1 è 1»

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Definizione ricorsiva:

caso base: «il fattoriale di 1 è 1»

riduzione del problema:

«per moltiplicare i numeri da 1 a N posso prima moltiplicare da 1 a N-1

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Definizione ricorsiva:

caso base: «il fattoriale di 1 è 1»

riduzione del problema:

«per moltiplicare i numeri da 1 a N posso prima moltiplicare da 1 a N-1

costruzione della soluzione finale a partire da quella ridotta:

… e poi moltiplicare per N»

Esempio

Funzione fattoriale

Definizione iterativa:

«il fattoriale di un numero intero N è il prodotto dei numeri 1..N»

Ovvero:

```
risultato = 1
for (i=N ; i>0 ; i--)
        risultato *= i
```

Definizione ricorsiva:

caso base: «il fattoriale di 1 è 1»

riduzione del problema:

«per moltiplicare i numeri da 1 a N posso prima moltiplicare da 1 a N-1

costruzione della soluzione finale a partire da quella ridotta:

… e poi moltiplicare per N»

Ovvero

fattoriale(N) = 1	**se N < 2**	**(caso base)**
fattoriale(N) = N * fattoriale(N-1)	**altrimenti**	**(caso ricorsivo)**

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1                # risultato = 1
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1              # risultato = 1
ciclo:
        blez  $a0, fine           # se N <= 0 si è finito
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1              # risultato = 1
ciclo:
        blez  $a0, fine           # se N <= 0 si è finito
        mul   $v0, $v0, $a0       # risultato *= N
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1              # risultato = 1
ciclo:
        blez  $a0, fine           # se N <= 0 si è finito
        mul   $v0, $v0, $a0       # risultato *= N
        sub   $a0, $a0, 1         # N = N-1
        j     ciclo
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1            # risultato = 1
ciclo:
        blez  $a0, fine         # se N <= 0 si è finito
        mul   $v0, $v0, $a0     # risultato *= N
        sub   $a0, $a0, 1       # N = N-1
        j     ciclo
fine:
```

Implementazione iterativa in ASM

```
        # moltiplico i numeri da N a 1
        # a0 = N
fattoriale:
        li    $v0, 1              # risultato = 1
ciclo:
        blez  $a0, fine           # se N <= 0 si è finito
        mul   $v0, $v0, $a0       # risultato *= N
        sub   $a0, $a0, 1         # N = N-1
        j     ciclo
fine:
        # torno  l'esecuzione al chiamante
        jr    $ra
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez  $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base    # se N <= 0 si è nel caso base
```

```
caso_base:                        # caso base
        li      $v0, 1            # risultato = 1
        jr      $ra               # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez  $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        sub   $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal   fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)

caso_base:                            # caso base
        li    $v0, 1                  # risultato = 1
        jr    $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)

        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)

        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)

        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez  $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        ... qui preserviamo (su stack) $ra e $a0 perché servono dopo

        sub   $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal   fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)


        mul   $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr    $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                            # caso base
        li    $v0, 1                  # risultato = 1
        jr    $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez  $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base

        ... qui preserviamo (su stack) $ra e $a0 perché servono dopo

        sub   $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal   fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)

        ... qui ripristiniamo $a0 e $ra (dallo stack)

        mul   $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr    $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                            # caso base
        li    $v0, 1                  # risultato = 1
        jr    $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva (completa)

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base


        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)


        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva (completa)

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base
        subi    $sp, $sp, 8             # alloco 2 word su stack
        sw      $ra, 0($sp)             # salvo $ra
        sw      $a0, 4($sp)             # salvo $a0
        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)



        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva (completa)

```
        # a0 = N
fattoriale_ricorsivo:
        blez    $a0, caso_base          # se N <= 0 si è nel caso base
        subi    $sp, $sp, 8             # alloco 2 word su stack
        sw      $ra, 0($sp)             # salvo $ra
        sw      $a0, 4($sp)             # salvo $a0
        sub     $a0, $a0, 1             # N = N-1
        jal     fattoriale_ricorsivo    # calcolo di fattoriale(N-1)
        lw      $ra, 0($sp)             # ripristino $ra
        lw      $a0, 4($sp)             # ripristino $a0 (ovvero N)
        addi    $sp, $sp, 8             # disalloco 2 word dallo stack
        mul     $v0, $v0, $a0           # risultato *= N
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Ricorsione multipla

È possibile che una funzione chiami se stessa più volte
Esempio: i numeri di Fibonacci

> «Su una isola c'è una coppia di giovani conigli,
> i coniglietti il primo anno sono troppo giovani e non fanno figli
> una coppia di conigli ogni anno a partire dal secondo fa un'altra coppia di conigli
> dopo N anni quante coppie sono presenti sull'isola?»

Ricorsione multipla

È possibile che una funzione chiami se stessa più volte
Esempio: i numeri di Fibonacci

> «Su una isola c'è una coppia di giovani conigli,
> i coniglietti il primo anno sono troppo giovani e non fanno figli
> una coppia di conigli ogni anno a partire dal secondo fa un'altra coppia di conigli
> dopo N anni quante coppie sono presenti sull'isola?»

Cosa succede:

Fibonacci(0) = 1	la prima coppia è stata messa sull'isola
Fibonacci(1) = 1	al primo anno la prima coppia è ancora giovane
Fibonacci(2) = 1 + 1	al secondo anno la coppia iniziale genera una seconda coppia
Fibonacci(3) = 2 + 1	la seconda coppia non è matura, la prima coppia genera ancora
Fibonacci(4) = 3 + 2	tutte le coppie che hanno almeno 2 anni generano altre coppie
Fibonacci(5) = 5 + 3	ovvero oltre alle Fibonacci(N-1) coppie dell'anno precedente, si aggiungono Fibonacci(N-2) nuove coppie ogni anno

Definizione ricorsiva

Fibonacci(0) = 1

Fibonacci(1) = 1

Fibonacci(N) = Fibonacci(N-1) # quelli vivi l'anno precedente
+ Fibonacci(N-2) # quelli nati da almeno 2 anni

Realizzazione in Python:

```
def fibonacci(N):
    if N < 2:
        return 1    # caso base
    else:
        # caso ricorsivo
        return fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base    # se N < 2 si è nel caso base
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
```

```
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato




caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)



caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N

        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N
        ... salvataggio dei registri su stack
        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N
        ... salvataggio dei registri su stack
        li      $t0, 2
        blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)
        ... ripristino dei registri dallo stack
        add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                              # caso base
        li      $v0, 1                  # risultato = 1

        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Implementazione ricorsiva

```
fibonacci:      # a0 = N
    ... salvataggio dei registri su stack
    li      $t0, 2
    blt     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso base
    sub     $a0, $a0, 1             # N-1
    jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
    move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
    sub     $a0, $a0, 1             # N-2
    jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)
    ... ripristino dei registri dallo stack
    add     $v0, $v0, $v1           # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
    jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
caso_base:                          # caso base
    li      $v0, 1                  # risultato = 1
    ... ripristino dei registri dallo stack
    jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante
```

Salvataggio su stack

- Cosa va salvato? (tutto assieme così gli offset restano uguali e non faccio errori)
- `$ra` perché la funzione chiama un'altra funzione (se stessa)
- `$a0` perché la funzione ha bisogno di N per calcolare N-1 e N-2
- `$v1` perché la funzione deve ricordare F(N-1) per poi sommarlo a F(N-2)
- `$t0` (opzionale) se vogliamo modificare il minor numero di registri possibili
- Quindi:

```
fibonacci:      # a0 = N
```

```
        li      $t0, 2
        ble     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso
base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
# (segue)
```

Salvataggio su stack

- Cosa va salvato? (tutto assieme così gli offset restano uguali e non faccio errori)
- `$ra` perché la funzione chiama un'altra funzione (se stessa)
- `$a0` perché la funzione ha bisogno di N per calcolare N-1 e N-2
- `$v1` perché la funzione deve ricordare F(N-1) per poi sommarlo a F(N-2)
- `$t0` (opzionale) se vogliamo modificare il minor numero di registri possibili
- Quindi:

```
fibonacci:      # a0 = N
        subi    $sp, $sp, 16            # alloco 4 word su stack
        sw      $ra, 0($sp)             # salvo $ra
        sw      $a0, 4($sp)             # salvo $a0
        sw      $v1, 8($sp)             # salvo $v1
        sw      $t0, 12($sp)            # salvo $t0
        li      $t0, 2
        ble     $a0, $t0, caso_base     # se N < 2 si è nel caso
base
        sub     $a0, $a0, 1             # N-1
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-1)
# (segue)
```

Ripristino da stack

```
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)

        add     $v0, $v0, $v1 # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                     # torno  l'esecuzione al chiamante

# (segue)
```

Ripristino da stack

```
        move    $v1, $v0                # tengo da parte il risultato
        sub     $a0, $a0, 1             # N-2
        jal     fibonacci               # calcolo di fibonacci(N-2)
        lw      $ra, 0($sp)             # recupero $ra
        lw      $a0, 4($sp)             # recupero $a0
        lw      $v1, 8($sp)             # recupero $v1
        lw      $t0, 12($sp)            # recupero $t0
        addi    $sp, $sp, 16            # dealloco 4 word da stack
        add     $v0, $v0, $v1 # fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)
        jr      $ra                 # torno  l'esecuzione al chiamante

# (segue)
```

Caso base

```
caso_base:                    # caso base
      li    $v0, 1            # risultato = 1
```

```
      jr    $ra   # torno  l'esecuzione al chiamante
```

NOTA: per ogni possibile percorso di esecuzione nella funzione (caso base o caso ricorsivo) dev'essere eseguita una coppia di salvataggio-ripristino identica altrimenti la gestione della stack diviene irregolare

Caso base

```
caso_base:                          # caso base
        li    $v0, 1                # risultato = 1
        lw    $ra, 0($sp)           # recupero $ra
        lw    $a0, 4($sp)           # recupero $a0
        lw    $v1, 8($sp)           # recupero $v1
        lw    $t0, 12($sp)          # recupero $t0
        addi  $sp, $sp, 16 # disalloco 4 word da stack
        jr    $ra   # torno  l'esecuzione al chiamante
```

NOTA: per ogni possibile percorso di esecuzione nella funzione (caso base o caso ricorsivo) dev'essere eseguita una coppia di salvataggio-ripristino identica altrimenti la gestione della stack diviene irregolare

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

```
funzione( argomenti )
    if caso_base
        istruzioni del caso base
        return risultato
    else
        istr. prima della ricorsione
        calcolo di argomenti1
        funzione( argomenti1 )
        istr. dopo la ricorsione
    return risultato
```

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)

if caso_base

istruzioni del **caso base**

return risultato

else

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

funzione(argomenti1)

istr. dopo la ricorsione

return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)
- **if caso_base**
  - istruzioni del **caso base**
  - return risultato
- **else**
  - istr. prima della ricorsione
  - calcolo di argomenti1
  - **funzione(argomenti1)**
  - istr. dopo la ricorsione
- return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)
- istr. prima della ricorsione
- calcolo di argomenti1

istr. dopo la ricorsione

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)

if caso_base

istruzioni del **caso base**

return risultato

else

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

funzione(argomenti1)

istr. dopo la ricorsione

return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

istr. dopo la ricorsione

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)
    if caso_base
        istruzioni del **caso base**
        return risultato
    else
        istr. prima della ricorsione
        calcolo di argomenti1
        funzione(argomenti1)
        istr. dopo la ricorsione
    return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)
    istr. prima della ricorsione
    calcolo di argomenti1
        istr. prima della ricorsione
        calcolo di argomenti2
        istr. dopo la ricorsione
    istr. dopo la ricorsione

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)

if caso_base

istruzioni del **caso base**

return risultato

else

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

funzione(argomenti1)

istr. dopo la ricorsione

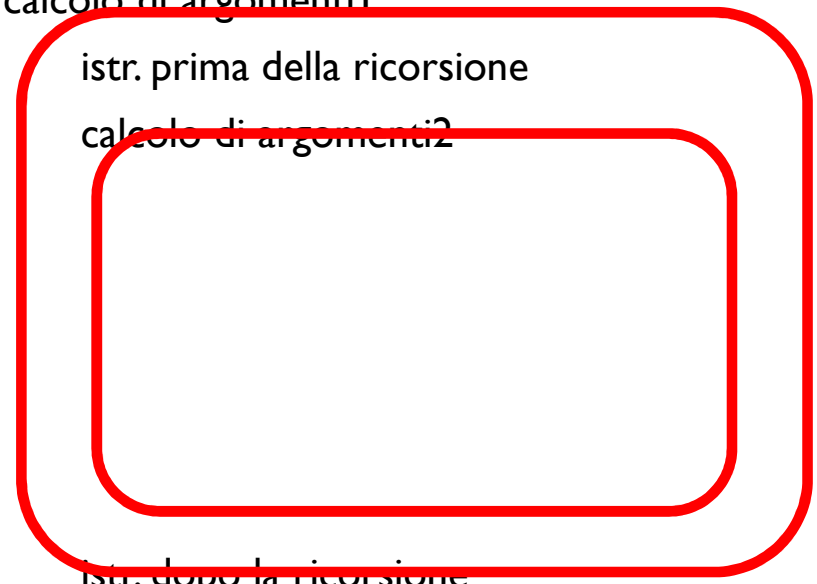
return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1



istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti2

istr. dopo la ricorsione

istr. dopo la ricorsione

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

```
funzione( argomenti )
    if caso_base
        istruzioni del caso base
        return risultato
    else
        istr. prima della ricorsione
        calcolo di argomenti1
        funzione( argomenti1 )
        istr. dopo la ricorsione
    return risultato
```

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

```
funzione( argomenti0 )
    istr. prima della ricorsione
    calcolo di argomenti1
        istr. prima della ricorsione
        calcolo di argomenti2
            istr. prima della ricorsione
            calcolo di argomenti3
            istr. dopo la ricorsione
        istr. dopo la ricorsione
istr. dopo la ricorsione
```

Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)

if caso_base

istruzioni del **caso base**

return risultato

else

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

funzione(argomenti1)

istr. dopo la ricorsione

return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti2

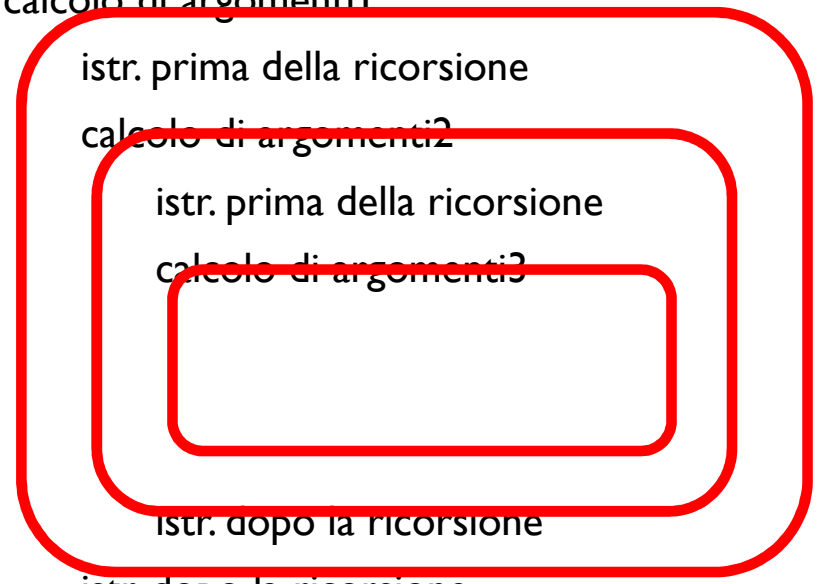
istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti3

istr. dopo la ricorsione

istr. dopo la ricorsione

istr. dopo la ricorsione



Ricorsione -> iterazione

È sempre possibile trasformare un problema ricorsivo in uno iterativo (e viceversa)

Caso semplice, se la funzione ricorsiva ha una sola chiamata ricorsiva:

funzione(argomenti)

if caso_base

istruzioni del **caso base**

return risultato

else

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

funzione(argomenti1)

istr. dopo la ricorsione

return risultato

L'esecuzione si svolgerà più o meno così:

funzione(argomenti0)

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti1

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti2

istr. prima della ricorsione

calcolo di argomenti3

….

istruzioni del caso base

….

istr. dopo la ricorsione

istr. dopo la ricorsione

istr. dopo la ricorsione

… versione iterativa

- Che è possibile realizzare con due cicli che eseguono nell'ordine:

Funzione(argomenti)

… versione iterativa

- Che è possibile realizzare con due cicli che eseguono nell'ordine:

- la ripetizione delle **istruzioni precedenti** alla chiamata ricorsiva, (compresa di **aggiornamento degli argomenti** della chiamata)

```
Funzione( argomenti)
    N=0
    while (not caso base)
        N += 1
        istr. prima della ricorsione
        aggiornamento degli argomenti
```

… versione iterativa

- Che è possibile realizzare con due cicli che eseguono nell'ordine:

- la ripetizione delle **istruzioni precedenti** alla chiamata ricorsiva, (compresa di **aggiornamento degli argomenti** della chiamata)
- il **caso base**

```
Funzione( argomenti)
    N=0
    while (not caso base)
        N += 1
        istr. prima della ricorsione
        aggiornamento degli argomenti
    istruzioni del caso base
```

… versione iterativa

- Che è possibile realizzare con due cicli che eseguono nell'ordine:

- la ripetizione delle **istruzioni precedenti** alla chiamata ricorsiva, (compresa di **aggiornamento degli argomenti** della chiamata)
- il **caso base**
- e poi la ripetizione (per lo stesso numero di volte) delle **istruzioni seguenti** la chiamata ricorsiva (se necessario riottenendo il valore che avevano gli **argomenti**)

```
Funzione( argomenti)
    N=0
    while (not caso base)
        N += 1
        istr. prima della ricorsione
        aggiornamento degli argomenti
    istruzioni del caso base
    for (i=0 ; i<N ; i++)
        ricostruzione degli argomenti
        istr. dopo la ricorsione
```

… versione iterativa

- Che è possibile realizzare con due cicli che eseguono nell'ordine:

- la ripetizione delle **istruzioni precedenti** alla chiamata ricorsiva, (compresa di **aggiornamento degli argomenti** della chiamata)
- il **caso base**
- e poi la ripetizione (per lo stesso numero di volte) delle **istruzioni seguenti** la chiamata ricorsiva (se necessario riottenendo il valore che avevano gli **argomenti**)

```
Funzione( argomenti)
    N=0
    while (not caso base)
        N += 1
        istr. prima della ricorsione
        aggiornamento degli argomenti
    istruzioni del caso base
    for (i=0 ; i<N ; i++)
        ricostruzione degli argomenti
        istr. dopo la ricorsione
```

NOTA se la ricorsione è multipla un contatore non è sufficiente a ricostruire la struttura delle chiamate e può essere necessario usare una stack per simulare la gestione corretta delle chiamate

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                 # contatore
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                 # contatore
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                 # contatore
    while (N >1):
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1         # ricostruisco args
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1         # ricostruisco args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
        return F2
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1         # ricostruisco args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
        return F2
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1         # ricostruisco args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
    return F1
```

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
        return F2
```

```
def fattoriale(N):
    i=0                   # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1         # conto  chiamate
        N = N – 1         # aggiorno args
    F1 = 1                # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1         # ricostruisco args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
    return F1
```

NOTA: possiamo semplificare la versione iterativa usando la commutatività dell'operazione prodotto per svolgere i prodotti da N a 1 invece che da 1 a N ed eliminando il conteggio non più necessario

Esempio (in Python)

```
def fattoriale( N ):
    if N < 2:
        return 1          # caso base
    else:
        N1 = N – 1        # aggiorno args
        F1 = fattoriale( N1 )# ricorsione


        F2 = F1 * N       # istr. dopo ric.
        return F2
```

NOTA: possiamo semplificare la versione iterativa usando la commutatività dell'operazione prodotto per svolgere i prodotti da N a 1 invece che da 1 a N ed eliminando il conteggio non più necessario

```
def fattoriale(N):
    i=0               # contatore
    while (N >1):
        i = i + 1     # conto  chiamate
        N = N – 1     # aggiorno args
    F1 = 1            # caso base
    for j in range(i):
        N = N + 1     # ricostruisco args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
    return F1
```

```
def fattoriale(N):
    F1 = 1            # caso base
    while (N >1):
        N = N – 1     # aggiorno args
        F1 = F1 * N # istr. dopo ric.
    return F1
```

Esercizio

Realizzare in assembler, sia in forma ricorsiva che in forma iterativa, la funzione GCD (massimo comun divisore di due interi positivi) definita come segue:

GCD(x, y) = x **se x = y**
GCD(x, y) = GCD(y, x) **se x > y**
GCD(x, y) = GCD(x, y – x) **se x < y**

Esempio di esecuzione

GCD(120, 105) =
GCD(105, 120) =
GCD(105, 15) =
GCD(15, 105) =
GCD(15, 90) =
GCD(15, 75) =
GCD(15, 60) =
GCD(15, 45) =
GCD(15, 30) =
GCD(15, 15) = 15