

Esame di Architetture degli Elaboratori 1
canale E-O – Andrea Sterbini
25 Febbraio 2004

Parte 1

Esercizio 1 (5 punti)

Si dimostri **SENZA USARE L'INDUZIONE PERFETTA** se le seguenti uguaglianze Booleane sono identità

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} + b\bar{c} + [a \cdot (b + \bar{b}\bar{c})] = \bar{c} + a$$

$$x y + x z + y z = (x + y)(x + z)(z + y)$$

Esercizio 2 (10 punti)

Per ciascuna delle formule che seguono si trovino le forme canoniche SOP e POS

$$b\bar{c} + \bar{a}b + bc\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}\bar{c}d$$

$$(a+b)(\bar{a}+c)(b+c+d)$$

Esercizio 3 (15 punti)

Si progetti il circuito combinatorio che, dato in input un numero binario **X** rappresentato da 3 bit seguendo la codifica di Gray, produce il numero binario **Y** rappresentato da 3 bit seguendo la codifica in complemento a 2. Il circuito va realizzato con **multiplexer 4-a-1**.

Il valore di **Y** va calcolato con la formula:

$$Y = (X^3 \bmod 8) - 4$$

Esempio: se $X=5$ si ottiene $Y = (125 \bmod 8) - 4 = 5 - 4 = +1$

Parte 2

Esercizio 4

Si progetti il circuito sequenziale che riceve un solo bit di input **x** ed emette un solo bit di output **z** tale che:

- **z=1 se e solo se** negli ultimi 3 bit sono presenti esattamente 2 '1'

Esempio di input e di output: (in grassetto evidenzio i bit riconosciuti, anche sovrapposti)

$x = 0000101010011100010010101001101010100$

$z = 0000001010001010000000101000111010100$

Si svolga il progetto seguendo i passi:

1. si progetti l'automa (5 punti)
2. lo si minimizzi o se ne dimostri la non minimizzabilità (5 punti)
3. si costruisca la tabella delle transizioni degli stati dei flip-flop (5 punti)
4. si calcolino le funzioni di eccitazione dei flip-flop con i seguenti tipi (5 punti)
 - y_2 sia rappresentato da un flip-flop di tipo **Master-Slave SR**
 - y_1 sia rappresentato da un flip-flop di tipo **JK**
 - y_0 sia rappresentato da un flip-flop di tipo **D**
5. si realizzino le funzioni **S, R, J, K, D** e **z** con una unica PLA (10 punti)

Si ricordano qui a fianco le tabelle di transizione dei flip-flop SR, JK, D

yJK	Y
000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	0
110	1
111	0

ySR	Y
000	0
001	0
010	1
011	-
100	1
101	0
110	1
111	-

yD	Y
00	0
01	1
10	0
11	1

Soluzione

Esercizio 1

Entrambe le formule sono identità. Se ad esempio le portiamo in forma canonica otteniamo:

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+[a\cdot(b+\bar{b}\bar{c})]&=\bar{c}+a \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+[a\cdot(b+\bar{b}+\bar{c})]&=\bar{c}+a \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+[a\cdot 1]&=\bar{c}+a \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}+(a+\bar{a})b\bar{c}+a(b+\bar{b})(c+\bar{c})&=(a+\bar{a})(b+\bar{b})\bar{c}+a(b+\bar{b})(c+\bar{c}) \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}+ab\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+abc+a\bar{b}\bar{c}+ab\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}&=ab\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+abc+ab\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c} \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}+ab\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+abc+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}&=ab\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+abc+a\bar{b}\bar{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xyz+xz+yz&=(x+y)(x+z)(z+y) \\ xy(z+\bar{z})+x(y+\bar{y})z+(x+\bar{x})yz&=xxz+xxz+xyx+xyz+yxz+yzx+yxy+yzx \\ xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz&=xz+xz+xy+xyz+yxz+yzx+xy+yz \\ xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz&=xz+xy+xyz+yz \\ xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz&=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz+xz \\ xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz&=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+\bar{x}yz\end{aligned}$$

Esercizio 2

Da fare

Esercizio 3

La tabella di verità della funzione Y è quella qua sotto, quindi le tabelle per calcolare gli input dei 3 multiplexer (se si usano sono i bit g_1g_0 come selettori) sono:

X	$g_2g_1g_0$	Y	$y_2y_1y_0$
0	000	-4	100
1	001	-3	101
2	011	-4	100
3	010	-1	111
4	110	-4	100
5	111	1	001
6	101	-4	100
7	100	3	011

y_2		g_1g_0			
		00	01	10	11
g_2	0	1	1	1	1
	1	1	0	1	0
		1	ng_2	1	ng_2

y_1		g_1g_0			
		00	01	10	11
g_2	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	1
		0	0	0	1

y_0		g_1g_0			
		00	01	10	11
g_2	0	0	1	0	1
	1	0	1	0	1
		0	1	0	1

Si noti come y_0 sia identico a g_0 , quindi bastano 2 MUX.

Esercizio 4

Dover riconoscere esattamente 2 bit '1' su tre vuol dire dover riconoscere le stringhe: **011, 101, 110**

Per cui è necessario rappresentare i seguenti momenti del riconoscimento: **vuoto, 0, 01, 1, 10, 11**

Può convenire di introdurre anche gli stati **011, 101 e 110**, ma essi vengono sempre eliminati dalla minimizzazione.

La tabella di transizione è:

		input	
codifica	da	0	1
000	"	0/0	1/0
001	0	0/0	01/0
010	01	10/0	11/1
011	1	10/0	11/0
100	10	0/0	01/1
101	11	10/1	11/0

0	1-01(x)				
01	x	x			
1	0-10 1-11(x)	0-10 1-11(x)	x		
10	x	x	0-10 1-11(x)	x	
11	x	x	x	x	x
	"	0	01	1	10

Tabella di esclusione

Costruiamo la tabella di esclusione e scopriamo che l'automa è minimo:

Dalle tabelle di transizione dei flip-flop otteniamo le tabelle inverse:

yY	SR	JK	D
00	0 -	0 -	0
01	10	1 -	1
10	01	- 1	0
11	- 0	- 0	1

Dalla tabella di transizione degli stati e dalla codifica degli stati si costruisce la tabella delle transizioni dei flip flop (metà sinistra). Poi, usando le tabelle inverse dei flip-flop si possono determinare le funzioni di eccitazione necessarie per ottenere le transizioni desiderate (metà destra). Visto che l'automa ha 6 stati sono presenti 4 righe di "don't care".

x	y	Y	z	SR	JK	D
0	000	001	0	0 -	0 -	1
0	001	001	0	0 -	0 -	1
0	010	100	0	10	- 1	0
0	011	100	0	10	- 1	0
0	100	001	0	01	0 -	1
0	101	100	1	- 0	0 -	0
0	110	---	-	--	--	-
0	111	---	-	--	--	-
1	000	011	0	0 -	1 -	1
1	001	010	0	0 -	1 -	0
1	010	101	1	10	- 1	1
1	011	101	0	10	- 1	1
1	100	010	1	01	1 -	0
1	101	101	0	- 0	0 -	1
1	110	---	-	--	--	-
1	111	---	-	--	--	-

Minimizzando con le mappe di Karnaugh si ottengono le funzioni:

$$Z = x y_2 n y_0 + n x y_2 y_0 + x y_1 n y_0$$

z	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	-	-
11	1	0	-	-
10	0	0	0	1

$$S = y_1$$

S	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	-	-	-
11	0	-	-	-
10	0	0	1	1

$$R = n y_1 n y_0$$

R	00	01	11	10
00	-	-	0	0
01	1	0	-	-
11	1	0	-	-
10	-	-	0	0

$$J = x n y_0 + x n y_2$$

J	00	01	11	10
00	0	0	-	-
01	0	0	-	-
11	1	0	-	-
10	1	1	-	-

$$K = 1$$

K	00	01	11	10
00	-	-	1	1
01	-	-	-	-
11	-	-	-	-
10	-	-	1	1

$$D = n x n y_2 n y_1 + n x n y_1 n y_0 + n y_2 n y_1 n y_0 + x y_2 y_0 + x y_1$$

K	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	-	-
11	0	1	-	-
10	1	0	1	1

Da cui è facile costruire la PLA.

Basta ricordarsi che se lo stesso monomio appare in più formule DEVE APPARIRE UNA SOLA VOLTA nella PLA (e partecipa a più di un OR).