

Esercizi per il corso di Reti Logiche A prof. William Fornaciari

Macchine a Stati Finiti Sincrone
Sintesi a Livello Comportamentale

Materiale originariamente elaborato
dal prof. Fabio Salice

Premessa teorica : macchine a stati finiti – livello comportamentale

Una macchina a stati finiti è definita dalla quintupla $\langle I, U, S, \delta, \lambda \rangle$ dove I identifica alfabeto di ingresso (l'insieme dei simboli di ingresso), U l'insieme dei simboli di uscita, S l'insieme di cardinalità finita degli stati, δ la funzione di stato prossimo $\delta: S \times I \rightarrow S$ e λ la funzione di uscita. Quest'ultima è definita in modo diverso a seconda che si considerino macchine di Moore o di Mealy. In particolare, $\lambda: S \rightarrow U$ per le macchine di Moore, dove l'uscita è funzione solo dello stato, mentre $\lambda: S \times I \rightarrow U$ nel caso di macchine di Mealy in cui l'uscita è funzione sia dello stato sia degli ingressi.

I passi della sintesi di una macchina sequenziale sincrona sono scanditi dalla generazione di 4 successive rappresentazioni: la tabella degli stati, la tabella degli stati ridotta, la tabella delle transizioni e, infine, la tabella delle eccitazioni. Il passaggio da una rappresentazione alla successiva consiste nell'operare una specifica fase di sintesi. In particolare, l'ottimizzazione del numero degli stati nel passaggio dalla tabella degli stati a quella ridotta, la codifica dello stato nel passaggio dalla tabella degli stati ridotta alla tabella delle transizioni e l'identificazione dei segnali da applicare ai bistabili nel passaggio dalla tabella delle transizioni a quella delle eccitazioni.

Riduzione del numero degli stati

Macchine completamente specificate

La riduzione del numero degli stati si basa sulla identificazione di stati fra loro *indistinguibili*. Due stati si dicono *indistinguibili* se, osservando le sole uscite durante una qualunque evoluzione della macchina a partire da uno qualunque di questi due stati, è impossibile determinarne una differenza cioè è impossibile determinare da quale stato la macchina è evoluta: quindi, questi due stati possono essere rappresentati da un unico stato.

1. Si costruisce e si completa la tabella triangolare, inserendo i simboli di equivalenza, non equivalenza, e i vincoli che devono essere soddisfatti affinché due stati siano equivalenti.
2. Si propagano le equivalenze e le non equivalenze
3. Dalla tabella triangolare si ricava un grafo: i nodi sono gli stati, e se vi sono stati equivalenti vengono connessi con un arco.
4. Determinazione di gruppi di equivalenti: nel grafo del passo 3 si determinano quelle figure nelle quali i vertici sono tutti fra loro collegati; questi stati sono fra loro equivalenti, individuano un *gruppo di equivalenti*, e possono essere collassati in un unico stato.
5. Si ricava una tabella degli stati finale, in cui è avvenuta la minimizzazione del numero degli stati.

Macchine completamente specificate

6. E' data una tabella degli stati non completamente definita

7. Si individuano gli stati fra loro *compatibili*; gli stati si dicono compatibili quando partendo da questi, considerando ogni configurazione di ingresso applicabile, le uscite sono sempre identiche ove specificate.
8. Si costruisce e si completa la tabella triangolare inserendo i simboli rappresentanti la compatibilit , la non compatibilit , e i vincoli necessari affinche' due stati siano compatibili
9. Si propaga la non compatibilit , ma la compatibilit  puo' essere propagata solo se per realizzare la copertura si scelgono gruppi di compatibili tali da sciogliere i vincoli appropriati.
10. Dalla tabella triangolare si ricava un grafico: i nodi sono gli stati, e se vi sono stati compatibili vengono connessi con un arco.
11. Determinazione di gruppi di compatibili: nel grafo del passo 5 si determinano i poligoni chiusi, ognuno dei quali rappresenta un gruppo di compatibili che puo' essere collassato in un unico stato
12. Si ricava una tabella degli stati finale, in cui e' avvenuta la minimizzazione del numero degli stati.

Gli elementi di memoria (Flip Flop)

I bistabili utilizzati nel registro di stato possono essere di tipo D, SR, JK, T. Qui di seguito sono riportate le tabelle di eccitazione ad essi corrispondenti sia dirette sia inverse. La tabella di eccitazione diretta rappresenta la relazione tra i valori assunti dai segnali di controllo del bistabile, il valore attuale dell'uscita del bistabile stesso ed il valore che l'uscita assumer  dopo il primo fronte utile del segnale di sincronismo (di salita o discesa clock, in relazione al tipo). Invece, una tabella di eccitazione inversa rappresenta il legame tra una definita transizione dello stato del bistabile ed i segnali che lo alimentano; quest'ultima   particolarmente utile durante la fase di sintesi che, a partire dalla tabella delle transizioni, produce la tabella delle eccitazioni. A quest'ultimo proposito si rammenta che la tabella delle transizioni   indipendente dai tipi di elementi di memoria utilizzati mentre la tabella delle eccitazioni dipende strettamente dal tipo di bistabili di cui si intende far uso.

Osservazione 1. la tabella delle eccitazioni coincide con la tabella delle transizioni solo nel caso in cui si faccia uso di soli bistabili di tipo D.

Tabelle di eccitazione diretta

S	R	Q_{t+1}
0	0	Q_t
1	0	1
0	1	0
1	1	non ammesso

Figura 1 Tabella di eccitazione di un bistabile SR.

J	K	Q_{t+1}
0	0	Q_t
1	0	1
0	1	0
1	1	$\neg Q_t$

Figura 2 Tabella di eccitazione che descrive il comportamento del bistabile JK

T	Q_{t+1}
0	Q_t
1	$\neg Q_t$

Figura 3 Tabella che descrive il comportamento del bistabile T.

D	Q_{t+1}
0	0
1	1

Figura 4 Tabella che descrive il comportamento del bistabile D.

Tabelle di eccitazione inversa

Q_t	Q_{t+1}	S	R
0	0	0	–
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	–	0

Figura 5 Tabella di eccitazione inversa per un bistabile SR.

Q_t	Q_{t+1}	J	K
0	0	0	–
0	1	1	–
1	0	–	1
1	1	–	0

Figura 6 Tabella di eccitazione inversa del bistabile JK

Q_t	Q_{t+1}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 7 Tabella di eccitazione inversa del bistabile T

Q_t	Q_{t+1}	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Figura 8 Tabella di eccitazione inversa del bistabile D

Esercizi : macchine a stati finiti – livello comportamentale

Esercizio 1

Si formalizzi, con un automa a stati finiti, la seguente situazione:

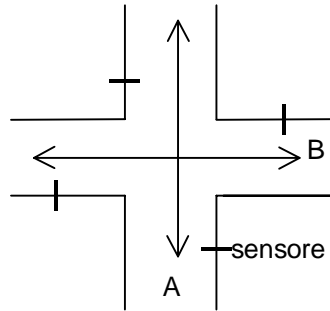


Figura 9 rappresentazione grafica di un incrocio.

Sia dato un incrocio dotato di due semafori A e B. I due semafori non hanno il giallo, e il verde è normalmente attivo per trenta secondi ($T=30''$). Vi sono però, dei sensori di coda che consentono di raddoppiare il periodo di durata del verde di un semaforo; sostanzialmente quando è attivo un sensore di coda relativo ad un determinato semaforo, la durata del verde di questo si prolunga fino ad un minuto; dopo un minuto di verde il semaforo diventa rosso anche se sono attivi i sensori di coda.

Lo stato è associato alla condizione dei semafori quindi l'uscita sarà funzione solo dello stato (automa alla Moore).

Si possono ora definire gli alfabeti di uscita e di ingresso:

- Uscita: B-verde: 01
A-verde: 10
- gli ingressi sono dati dai valori che assumono i sensori
 - N-T: 00 nessuno dei due sensori è attivo, condizione di Non-Traffico
 - A-T: 01 è attivo il sensore del percorso A, condizione di A-Traffico
 - B-T: 10 è attivo il sensore del percorso B, condizione di B-Traffico
 - AB-T 11 sono attivi i sensori del percorso A e B, condizione di AB-Traffico

Date le specifiche del problema si ricava l'automa:

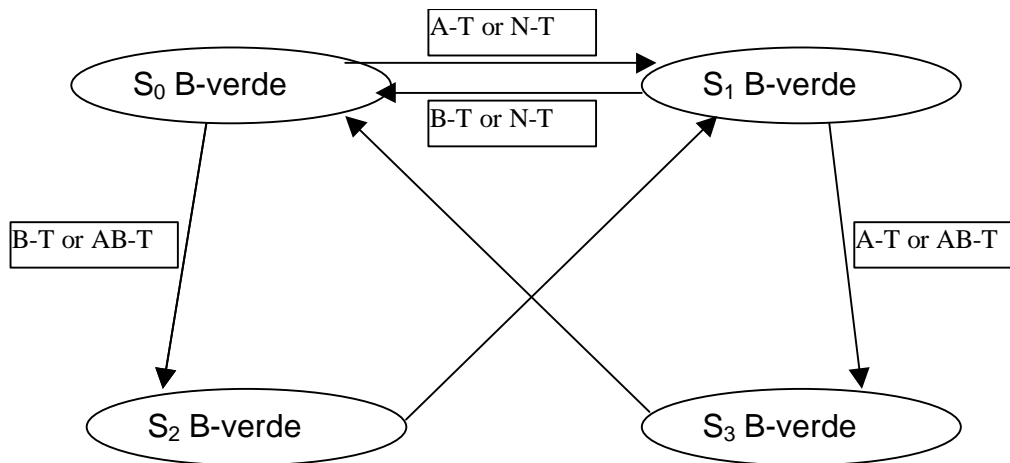


Figura 10 Automa alla Moore, rappresentante la situazione descritta nel testo.

Dall'automa è possibile ricavare la tabella degli stati:

	N-T	A-T	B-T	AB-T	U
S ₀	S ₁	S ₁	S ₂	S ₂	01
S ₁	S ₀	S ₃	S ₀	S ₂	10
S ₂	S ₁	S ₁	S ₁	S ₁	01
S ₃	S ₀	S ₀	S ₀	S ₀	10

Figura 11 Tabella degli stati. Sulle righe si hanno i possibili stati, sulle colonne i valori degli ingressi; vi è una colonna aggiuntiva nella quale è indicato il valore dell'uscita in funzione dello stato. All'interno della tabella è indicato lo stato prossimo.

Si consideri un possibile codifica degli stati, e in funzione di questa, si consideri nuovamente la tabella degli stati; questa nuova tabella viene detta tabella delle transizioni.

S₀: 00 S₁: 01 S₂: 10 S₃: 11

	00	01	10	11	U
00	01	01	10	10	01
01	00	11	00	11	10
10	01	01	01	01	01
11	00	00	00	00	10

Figura 12 Tabella delle transizioni.

oss. se venissero utilizzati flip flop di tipo D, dalla tabella delle transizioni si potrebbe ricavare la macchina a stati.

Supponendo di utilizzare flip flop di tipo JK(si ricordi la tabella che descrive il comportamento di tale bistabile illustrata nella premessa teorica).

Lo stato S, è costituito da due bit: s_0 e s_1 ; analizzando la tabella delle transizioni è possibile ricavare i valori che devono assumere i segnali J K. Per il bit di stato s_0 si ricavano i segnali J_0 e K_0 , così come per il bit di stato s_1 si ricavano i segnali J_1 e K_1 . Si costruisce in questo modo la tabella detta di *eccitazione*.

Identificando, nella tabella delle transizioni, il primo bit verso sinistra dello stato con s_1 e l'altro con s_0 , esaminando per esempio la casella a_{11} di tale tabella si osserva che:

$s_{1,t}=0$ in corrispondenza della configurazione di ingresso 00(=N-T) rimane a zero ($s_{1,t+1}=0$); si deduce pertanto che: $J=0 \quad K=x$ (*don't care*)

$s_0=0$ in corrispondenza della configurazione di ingresso 00(=N-T) deve diventare uno($s_{0,t+1}=1$); si deduce pertanto che: $J=1 \quad K=x$.

Iterando questo ragionamento è possibile ricavare le tabelle di eccitazione.

Esercizio 2

Sia data la tabella degli stati

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	h/0
e	h/0	d/1
f	e/1	c/0
g	a/1	h/0
h	d/0	f/1

Figura 13 Tabella degli stati

Si osserva che la tabella e' completamente specificata (e' quindi il primo caso della minimizzazione vista nella premessa teorica). Si costruisce la tabella triangolare inserendo, in base alla definizione di stati equivalenti, nelle caselle i simboli di:

X a *non equivalente* b

~ a *equivalente* b

vincolo (Es. cd) affinche' a sia equivalente b, deve essere c equivalente d

b	X						
c	X	c,b e,a					
d	X	X	X				
e	h,h g,d	X	X	X			
f	X	X	X	c,h	X		
g	X	X	X	a,e	X	e,a c,h	
h	h,d g,f	X	X	X	h,d d,f	X	X
	a	b	c	d	e	f	G

Figura 14 tabella triangolare

Propagando la non equivalenza, e trascurando di esprimere il vincol ah, perche' h e' equivalente a se stesso, si ottiene la seguente tabella triangolare:

b	X						
c	X	E,a					
d	X	X	X				
e	G,d	X	X	X			
f	X	X	X	X	X		
g	X	X	X	A,e	X	X	
h	X	X	X	X	X	X	X
	a	b	c	d	e	f	G

Figura 15 tabella triangolare ottenuta dopo la propagazione dell'equivalenza e della non equivalenza.

Si ricava quindi il grafo in cui i nodi rappresentano gli stati, e se due stati sono fra loro equivalenti vengono connessi con un arco.

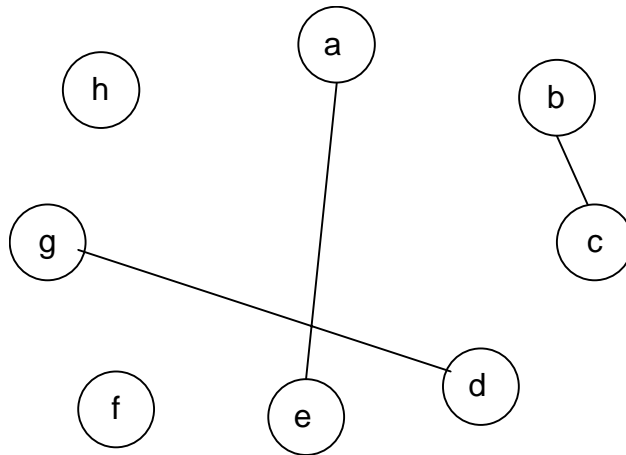


Figura 16 Grafo in cui si individuano gli stati fra loro equivalenti.

In questo grafo si individuano i gruppi di equivalenti; ogni gruppo di equivalenti è rappresentato da una figura in cui tutti i vertici sono fra loro collegati.

$\alpha = \{ a, e \}$ gruppo di equivalenti nel quale collassano gli stati a ed e.

$\beta = \{ b, c \}$ gruppo di equivalenti nel quale collassano gli stati b e c.

$\gamma = \{ g, d \}$ gruppo di equivalenti nel quale collassano gli stati g e d.

Degli stati originari non collassano in alcun gruppo di equivalenti soltanto gli stati f ed h.

E' possibile a questo punto ricavare la tabella degli stati ridotta:

	0	1
α	$h/0$	$\gamma/1$
β	$\beta/0$	$\alpha/0$
γ	$\alpha/1$	$h/0$
f	$\alpha/1$	$\beta/0$
h	$\gamma/0$	$f/1$

Figura 17 Tabella degli stati ridotta.

Esercizio 3

E' data la seguente tabella degli stati:

	0	1
a	e/0	a/0
b	d/0	b/0
c	e/-	c/-
d	a/1	a/1
e	a/-	b/-

Figura 18 Tabella degli stati.

Si osserva che la tabella non è completamente specificata; bisogna quindi utilizzare il metodo relativo al secondo caso della minimizzazione.

Si costruisce la tabella triangolare inserendo in base alla definizione di stati compatibili i simboli:

X a *non compatibile* b
 √ a *compatibile* b
 vincolo (Es. cd) affinché' a sia compatibile b, deve essere c compatibile d

b	e,d			
c	√	d,e		
d	x	x	a,e c,a	
e	a,b	d,a	b,c e,a	a,b
	a	b	c	d

Figura 19 Tabella triangolare.

Si propaga la non compatibilità mentre è possibile propagare la compatibilità degli stati a e c, soltanto se per realizzare la copertura si sceglierà un gruppo di compltibili che contiene sia a sia c. Con questo accorgimento del quale si dovrà tener conto in seguito è possibile propagare la compatibilità di a e c.

Si ottiene così la seguente tabella triangolare:

b	e,d			
c	√	d,e		
d	x	x	a,e c,a	
e	a,b	x	b,c e,a	a,b
	a	b	c	d

Figura 20 Tabella triangolare ottenuta dopo la propagazione della compatibilità e della non compatibilità.

Dalla tabella triangolare si ricava un grafo in cui:

- i nodi rappresentano gli stati
- se due stati sono compatibili vengono connessi con un arco; su questo arco viene indicato il vincolo che deve essere soddisfatto, ossia quali stati devono essere compatibili affinché i due stati connessi con l'arco siano effettivamente compatibili.

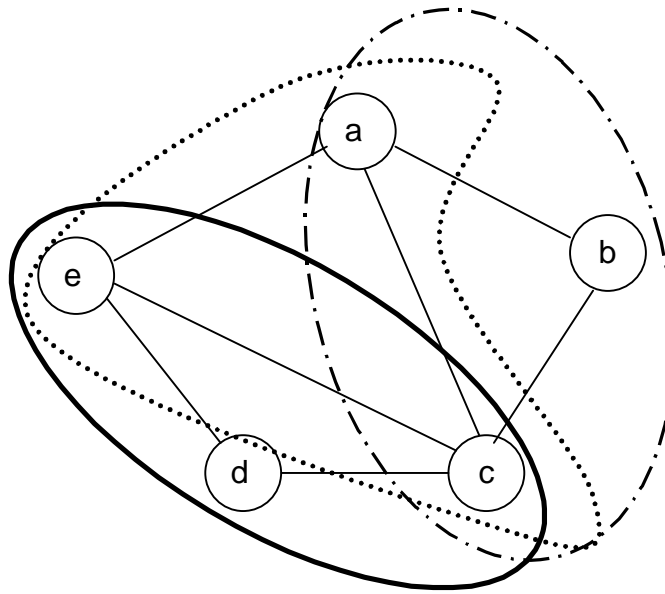


Figura 21 Grafo ricavato dalla tabella triangolare.

Si possono identificare diversi gruppi di compatibili(ogni poligono chiuso rappresenta un gruppo di compatibili)

oss. è a causa della presenza di molti gruppi di compatibili che in precedenza è stata posta l'ipotesi che la compatibilità di a e c, è propagabile nella tabella triangolare se e solo se, a questo punto, per realizzare la copertura, si sceglie un gruppo di compatibili che contenga sia a sia

Si possono per esempio considerare i seguenti gruppi di compatibili:

$\alpha = \{ e, d \}$ gruppo di compatibili nel quale collassano gli stati e e d.

$\beta = \{ a, b, c \}$ gruppo di compatibili nel quale collassano gli stati a, b, e c.

Si può scrivere la tabella degli stati ridotta:

	0	1
α	$\beta/1$	$\beta/1$
β	$\alpha/0$	$\beta/0$

Figura 22 Tabella degli stati ridotta.