PRIMO ESONERO di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI

CANALE A-L prof. Gorla **FILA A**

Nome e Cognome _____

Esercizio 1 (7 punti). Siano dati i seguenti numeri binari in rappresentazione con virgola mobile (1 bit di segno, 8 di mantissa e 4 di esponente): A = <0,11100001,1110> e B = <1,10011100,1001>.

a) *Il risultato di A×B è rappresentabile nel formato specificato? Perché? (2 punti)*

1110 +
1001 =
0111 } underflow degli esp.

b) *Si calcoli il risultato di A+B, eventualmente normalizzando il risultato (3 punti):*

Procedimento:

B = <1, 00000100, 1110>

11100001 −
00000100 =
11011101

Risultato: < 0 , 11011101 , 1110 >

c) *Si converta il risultato ottenuto in base 10 [N.B.: è possibile lasciarlo espresso come frazione ridotta ai minimi termini](2 punti):*

Procedimento:

$0,0011011101 = 2^{-3}+2^{-4}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-8}+2^{-10}$

$= \frac{2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+1}{2^{10}} = \frac{128+64+16+8+4+1}{1024}$

$= \frac{221}{1024}$

Esercizio 2 (4 punti). Si consideri la stringa binaria 110010 e se ne costruisca la parola di codice con bit di parità (pari), dove il bit di parità è messo in coda *(1 punto)*.

Risposta: 1100101

La stringa risultante è una parola di codice di Hamming 4-a-3? Se no, si assuma che c'è stato un singolo errore, lo si individui e lo si corregga (3 punti).

Procedimento:

1 1 0 0 1 0 1

X V V

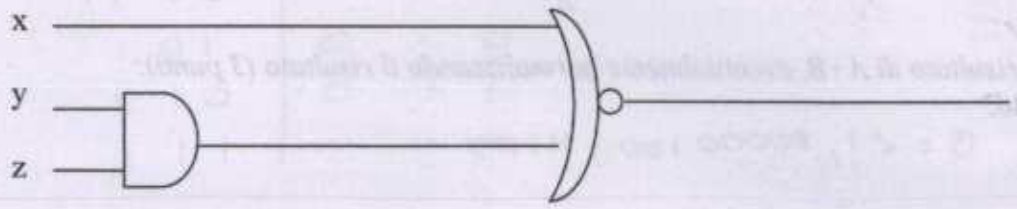
4

ERR SOL. 0100101

Esercizio 3 (2 punti). Si dimostri, usando gli assiomi dell'algebra di Boole, la legge di idempotenza della somma.

$$x = x + 0 = x + x\bar{x} = (x+x)(x+\bar{x}) = (x+x)\cdot 1 = x + x$$

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri il seguente circuito combinatorio:



a) Si scriva l'espressione booleana associata al circuito (1 punto): $\overline{zy} + x$

b) Si calcoli la forma canonica SOP (o disgiuntiva) associata all'espressione finale e da questa se ne ricavi la funzione booleana associata (3 punti)

Procedimento:

$$\overline{yz}\cdot\bar{x} = (\bar{y}+\bar{z})\bar{x} = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = m_0 + m_1 + m_2$$

xyz	f
000	1
001	1
010	1
011	0
100	0
101	0
110	0
111	0

c) Si calcoli, usando le mappe di Karnaugh, la POS minimale associata alla funzione (2 punti):

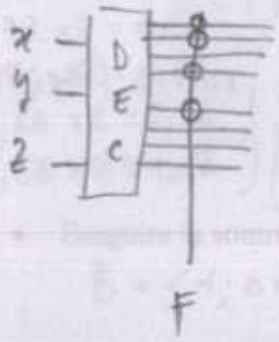
z \ xy	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	0	0	0

$$f = \bar{x}(\bar{z}+\bar{y})$$

Esercizio 5 (5 punti). Data la seguente funzione booleana:

$x\ y\ z$	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

La si realizzi tramite ROM (1 punto), PLA (1 punto) e multiplexer 4-a-1 (3 punti).

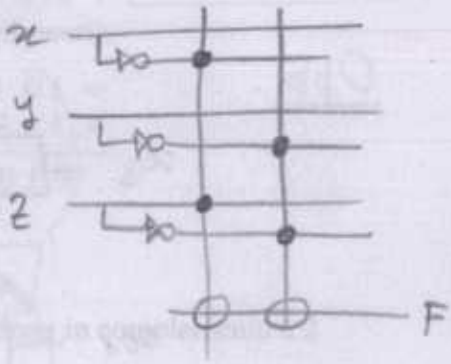


ROM

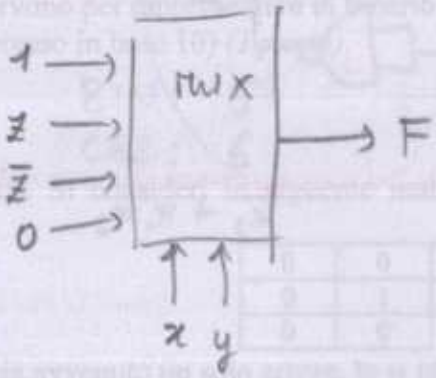
PLA

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0

$F = \bar{x}z + \bar{y}\bar{z}$



MUX



Esercizio 6 (8 punti). Si progetti un circuito combinatorio che, prese in input 4 variabili binarie ($x_3\ x_2\ x_1\ x_0$), restituisce in output $x_2 \cdot x_1$, se $x_3 = 1$, e $x_2 + x_1 + x_0$, se $x_2 > x_3$. In tutti gli altri casi non è definita. Realizzare il circuito usando solo porte NAND.

$x_3\ x_2\ x_1\ x_0$	f
0 0 0 0	-
0 0 0 1	-
0 0 1 0	-
0 0 1 1	-
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	1
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 0	1
1 1 1 1	1

2+2+4

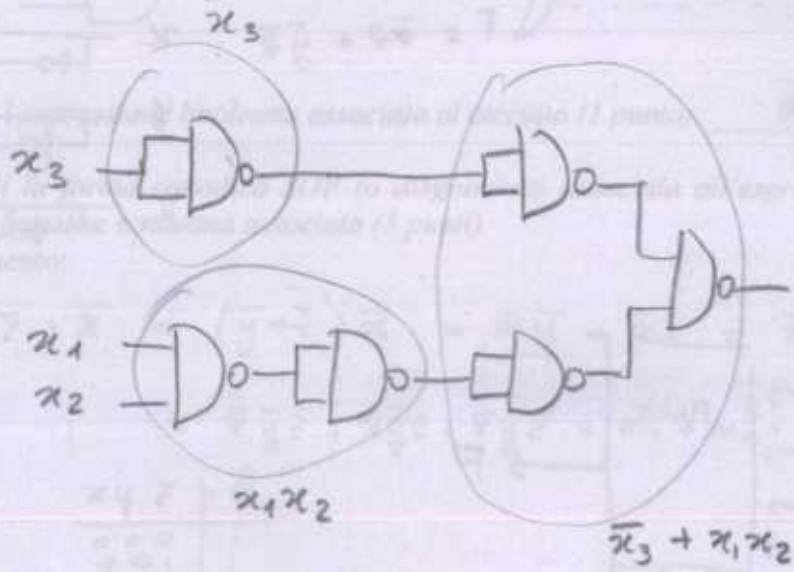
$x_1 x_0 \backslash x_3 x_2$	00	01	11	10
00	–	1	0	0
01	–	1	0	0
11	–	1	1	0
10	–	1	1	0

$$f = \overline{x_3} + x_2 x_1$$

$$= \overline{x_3 \cdot \overline{x_2 x_1}}$$

$$= \text{NAND}\left(x_3, \text{NAND}(x_1, x_2)\right)$$

Opp.



PRIMO ESONERO di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI
CANALE AL prof. Gorla **FILA B**

Nome e Cognome _____

Esercizio 1 (7 punti).

- Rappresentare in base 2 in virgola mobile sotto forma di tripla con 1 bit di segno, 10 di mantissa e 4 di esponente i valori A = 13,83 e B = -7,43 *(3 punti)*.

$13_{10} = 1101_2$

$0{,}83 \times 2 = 1{,}66$
$0{,}66 \times 2 = 1{,}32$
$0{,}32 \times 2 = 0{,}64$
$0{,}64 \times 2 = 1{,}28$
$0{,}28 \times 2 = 0{,}56$
$0{,}56 \times 2 = 1{,}12$

1101, 110101

⇓

$\boxed{A = \langle 0; 1101\ 110101; 0100 \rangle}$

$7_{10} = 111_2$

$0{,}43 \times 2 = 0{,}86$
$0{,}86 \times 2 = 1{,}72$
$0{,}72 \times 2 = 1{,}44$
$0{,}44 \times 2 = 0{,}88$
$0{,}88 \times 2 = 1{,}76$
$0{,}76 \times 2 = 1{,}52$
$0{,}52 \times 2 = 1{,}04$

111, 01101111

⇓

$\boxed{B = \langle 1; 1110110111; 0011 \rangle}$

- Eseguire la somma e dare il risultato sotto forma di tripla normalizzata *(3 punti)*.

$B = \langle 1; 0111011011; 0100 \rangle$

$$\begin{array}{r} 1101\ 110101\ - \\ 0111\ 011011\ = \\ \hline 0110\ 011010 \end{array}$$

$\boxed{A + B = \langle 0; 1100110100; 0011 \rangle}$

- Dire quanti bit servono per rappresentare in binario e nella rappresentazione in complemento a 2 il numero 25 (espresso in base 10) *(1 punto)*.

BIN: 5
CA2: 6

Esercizio 2 (5 punti). Si consideri la seguente matrice con bit di parità (pari) longitudinali e trasversali:

0	0	0
0	1	1
0	0	

- Assumendo che sia avvenuto un solo errore, lo si identifichi e lo si corregga *(2 punti)*

0	0	0
0	1	1
0	1	

- Assumendo che siano avvenuti al più due errori, si elenchino tutte le possibili configurazioni iniziali senza errori *(3 punti)*

0	0	0
0	1	1
0	1	

0	0	0
0	0	0
0	0	

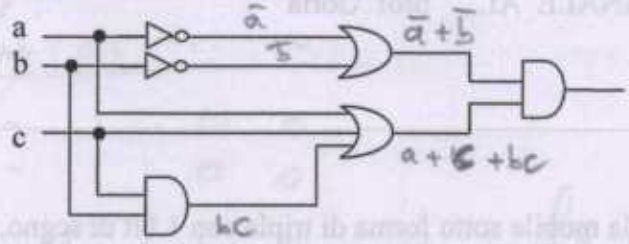
0	1	1
0	1	1
0	0	

Esercizio 3 (2 punti). Si dimostri, usando gli assiomi dell'algebra di Boole, l'identità: $x1 \oplus x2 = \overline{x1 \oplus \overline{x2}}$, dove $\oplus$ è il simbolo dello XOR.

$$\overline{x_1 \oplus \overline{x_2}} = \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1 x_2} \cdot \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = (\overline{x_1} + \overline{x_2})(x_1 + x_2)$$

$$= \overline{x_1} x_1 + \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2} + \overline{x_2} x_2 = \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2} = x_1 \oplus x_2$$

Esercizio 4 (7 punti). Si consideri il seguente circuito combinatorio:



1. Si scriva l'espressione booleana associata al circuito *(1 punto)*.

$$(\bar{a}+\bar{b})(a+c+bc)$$

2. Dall'espressione ottenuta al punto 1 si calcoli la forma canonica SOP (o disgiuntiva) *(2 punti)*.

$$\cancel{\bar{a}a}+\bar{a}c+\bar{a}bc+a\bar{b}+\bar{b}c+\cancel{\bar{b}bc} = \bar{a}\bar{b}c+\bar{a}bc+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c+\bar{a}\bar{b}c+a\bar{b}c$$

$$= \bar{a}\bar{b}c+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c = m_1+m_3+m_4+m_5$$

3. Dall'espressione ottenuta al punto 1 si calcoli la forma canonica POS (o congiuntiva) *(2 punti)*.

$$(\bar{a}+\bar{b})(a+b+c)(a+c) = (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c)(a+b+c)(a+\bar{b}+c)(a+b+c)$$

$$= (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c)(a+b+c)(a+\bar{b}+c)$$

$$= M_7 \cdot M_6 \cdot M_2 \cdot M_0$$

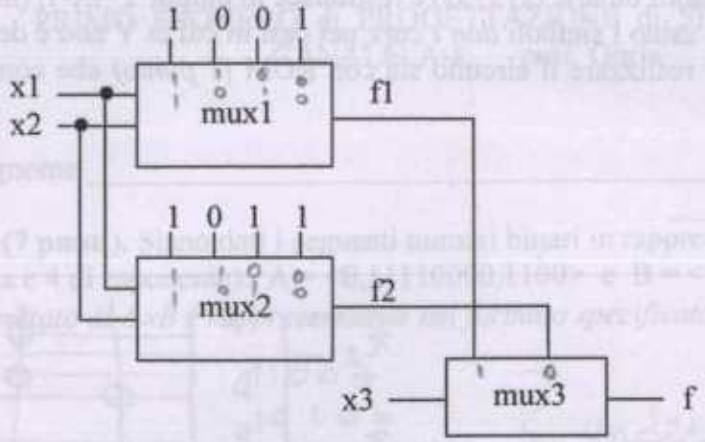
4. Si stenda la tavola di verità e si calcoli, usando le mappe di Karnaugh, la POS minimale associata alla funzione *(2 punti)*.

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	0	1

$$f = (a+c)(\bar{a}+\bar{b})$$

Esercizio 5 (5 punti). Dato il seguente schema circuitale



- Scrivere l'espressione corrispondente a **f1** *(2 punti).*

$$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2$$

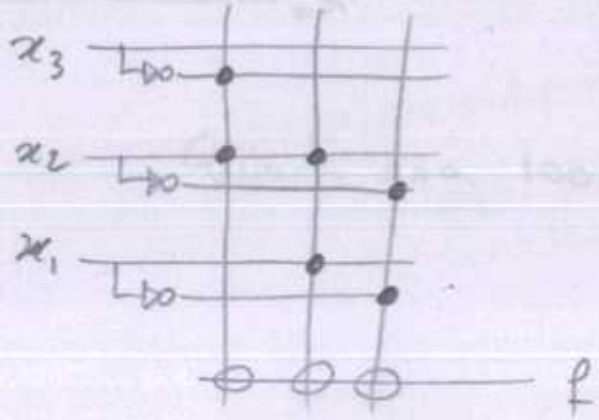
- Stendere la tavola di verità di **f** *(1 punto).*

x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	1	f_2
0	0	1	0	f_2 (ev. 1)
0	1	0	1	f_2 (ev. 0)
0	1	1	1	f_2
1	0	0	1	f_1
1	0	1	0	f_1
1	1	0	0	f_1
1	1	1	1	f_1

- Realizzare **f** con PLA *(2 punti).*

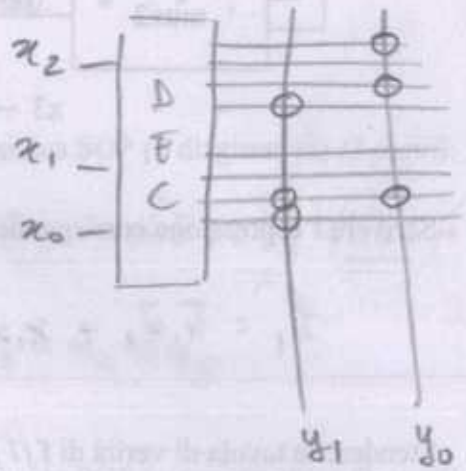
x_1 \ x_3x_2	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0

$$f = \bar{x}_3 x_2 + x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2$$



Esercizio 6 (6 punti). Si progetti un circuito combinatorio che riceve in input X nella rappresentazione in **complemento a 2** con 3 variabili binarie ($x_2\, x_1\, x_0$) e restituisce in output Y=|X-1| (modulo di X-1) rappresentato con 2 bit $y_1 y_0$. Si usino i simboli *don't care* nei casi in cui la Y non è definita. Scrivere la tavola di verità *(2 punti)* e realizzare il circuito sia con ROM *(1 punto)* che con porte logiche *(3 punti)*.

x_2	x_1	x_0	y_1	y_0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	–	–
1	0	1	–	–
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

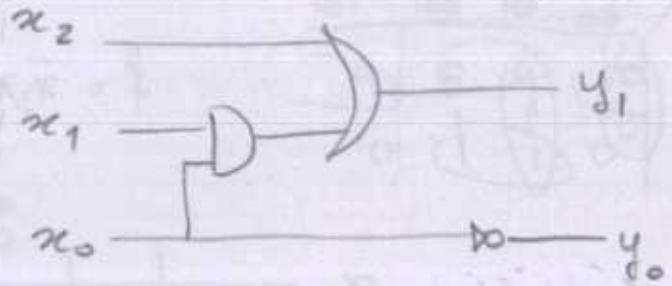


x_0 \ x_2x_1	00	01	11	10
0	0	0	1	–
1	0	1	1	–

$y_1 = x_2 + x_1 x_0$

x_0 \ x_2x_1	00	01	11	10
0	1	1	1	–
1	0	0	0	–

$y_0 = \overline{x_0}$



PRIMO ESONERO di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI
CANALE A-L prof. Gorla **FILA C**

Nome e Cognome _____

Esercizio 1 (7 punti). Siano dati i seguenti numeri binari in rappresentazione con virgola mobile (1 bit di segno, 8 di mantissa e 4 di esponente): A = <0,11110000,1100> e B = <1,10100110,1010>.

a) Il risultato di A×B è rappresentabile nel formato specificato? Perché? (2 punti)

$$\begin{array}{r} 1100 + \\ 1010 = \\ \hline 0110 \end{array} \Big\} \text{ underflow} \rightarrow \underline{\text{No}}$$

b) Si calcoli il risultato di A-B, eventualmente normalizzando il risultato (3 punti):

Procedimento:

B = <1; 0010 1001; 1100>

$$\begin{array}{r} 0,11110000 + \\ 0,00101001 = \\ \hline 1,00011001 \end{array}$$

Risultato: < 0 , 1000 1100 , 1101 >

c) Si converta il risultato ottenuto in base 10 [N.B.: è possibile lasciarlo espresso come frazione ridotta ai minimi termini](2 punti):

Procedimento: $0,000\,1000\,11 = 2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-9} = \frac{2^5+2+1}{2^9}$

$$= \frac{32+2+1}{512} = \frac{35}{512}$$

Esercizio 2 (4 punti). Si consideri la stringa binaria 100110 e se ne costruisca la parola di codice con bit di parità (pari), dove il bit di parità è messo in coda *(1 punto)*.

Risposta: 1001101

La stringa risultante è una parola di codice di Hamming 4-a-3? Se no, si assuma che c'è stato un singolo errore, lo si individui e lo si corregga (3 punti).

Procedimento:

1 0 0 1 1 0 1

_ _ _ _

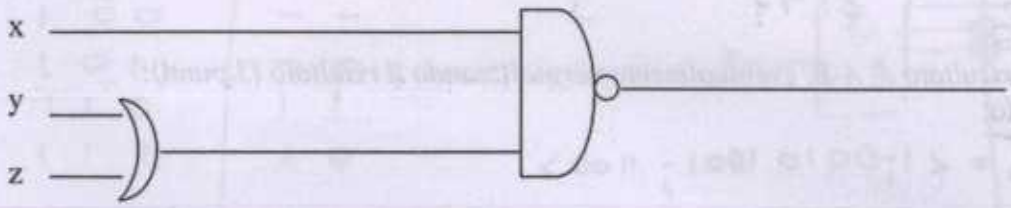
X X X 4

Quindi era 1001100

Esercizio 3 (2 punti). Si dimostri, usando gli assiomi dell'algebra di Boole, la legge di idempotenza del prodotto.

$$x = x \cdot 1 = x(x + \bar{x}) = xx + x\bar{x} = xx + 0 = xx$$

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri il seguente circuito combinatorio:



a) Si scriva l'espressione booleana associata al circuito (1 punto): $\overline{(y+z)x}$

b) Si calcoli la forma canonica POS (o congiuntiva) associata all'espressione finale e da questa se ne ricavi la funzione booleana associata (3 punti)

Procedimento:

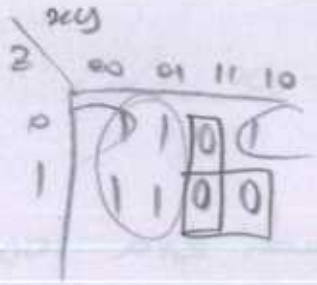
$$\overline{(y+z)x} = \overline{(y+z)} + \bar{x} = \bar{y}\bar{z} + \bar{x} = (\bar{y}+\bar{x})(\bar{z}+\bar{x})$$

$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})$$

$$= (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$$

x y z	f
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

c) Si calcoli, usando le mappe di Karnaugh, la ~~SOP~~ POS minimale associata alla funzione (2 punti):



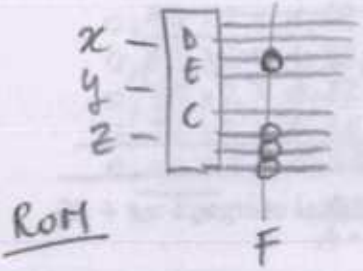
$$f = \cancel{\bar{x} + \bar{y}\bar{z}}$$

$$= (\bar{z}+\bar{x})(\bar{x}+\bar{y})$$

Esercizio 5 (5 punti). Data la seguente funzione booleana:

$x\ y\ z$	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

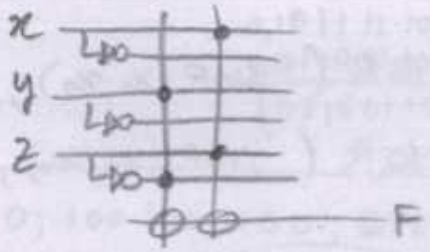
La si realizzi tramite ROM (1 punto), PLA (1 punto) e multiplexer 4-a-1 (3 punti).

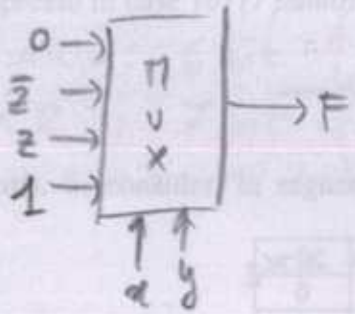


PLA

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

$F = \bar{z}y + zx$





Esercizio 6 (8 punti). Si progetti un circuito combinatorio che, prese in input 4 variabili binarie ($x_3\ x_2\ x_1\ x_0$), restituisce in output $x_2 \cdot x_1$, se $x_0 = 1$, e $x_1 + x_2 + x_3$, se $x_1 > x_0$. In tutti gli altri casi non è definita. Realizzare il circuito usando solo porte NOR.

$x_3 x_2 x_1 x_0$	f
0000	–
0001	0
0010	1
0011	0
0100	–
0101	0
0110	1
0111	1
1000	–
1001	0
1010	1
1011	0
1100	–
1101	0
1110	1
1111	1

$x_1 x_0 \backslash x_3 x_2$	00	01	11	10
00	–	–	–	–
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

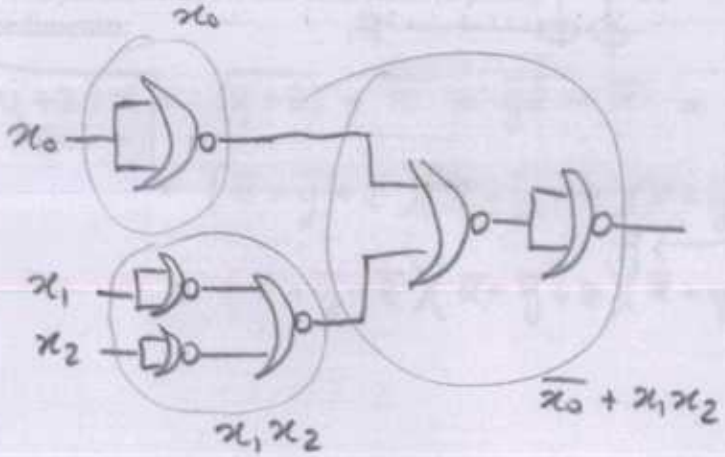
$$f = \overline{x_0} + x_1 x_2$$

$$= (\overline{x_0} + x_1)(\overline{x_0} + x_2)$$

$$= \overline{\overline{(\overline{x_0} + x_1)} + \overline{(\overline{x_0} + x_2)}}$$

$$= \overline{\overline{\overline{x_0 + x_0} + x_1} + \overline{\overline{x_0 + x_0} + x_2}}$$

$$= \mathrm{NOR}\big(\mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x_0, x_0), x_1),\ \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x_0, x_0), x_2)\big)$$



PRIMO ESONERO di PROGETTAZIONE di SISTEMI DIGITALI

CANALE AL prof. Gorla **FILA D**

Nome e Cognome _____

Esercizio 1 (7 punti).

- Rappresentare in base 2 in virgola mobile sotto forma di tripla con 1 bit di segno, 10 di mantissa e 4 di esponente i valori: A = 11,92 e B = -6,49 *(3 punti)*.

$11_{10} = 1011_2$

$0,92 \times 2 = 1,84$
$0,84 \times 2 = 1,68$
$0,68 \times 2 = 1,36$
$0,36 \times 2 = 0,72$
$0,72 \times 2 = 1,44$
$0,44 \times 2 = 0,88$

1011,11 1010

⇓

$\boxed{A = \langle 0; 1011\ 11\ 1010; 0100 \rangle}$

$6_{10} = 110_2$

$0,49 \times 2 = 0,98$
$0,98 \times 2 = 1,96$
$0,96 \times 2 = 1,92$
$0,92 \times 2 = 1,84$
$0,84 \times 2 = 1,68$
$0,68 \times 2 = 1,36$
$0,36 \times 2 = 0,72$

110,0111 110

⇓

$\boxed{B = \langle 1; 110\ 0111\ 110; 0011 \rangle}$

- Eseguire ~~la differenza~~ A - B e dare il risultato sotto forma di tripla normalizzata *(3 punti)*.

$B = \langle 1; 0110\ 0111\ 11; 0100 \rangle$

$$\begin{array}{r} 0,1011\ 11\ 10\ 10\ + \\ 0,0110\ 0111\ 11\ = \\ \hline 1,0010\ 0110\ 01 \end{array}$$

$\boxed{A - B = \langle 0; 100\ 100\ 1100; 0101 \rangle}$

- Dire quanti bit servono per rappresentare in binario e nella rappresentazione in complemento a 2 il numero 46 (espresso in base 10) *(1 punto)*.

BINARIO: 6 bit

CA2 : 7 bit

Esercizio 2 (5 punti). Si consideri la seguente matrice con bit di parità (pari) longitudinali e trasversali:

0	1	0
0	0	0
0	1	

- Assumendo che sia avvenuto un solo errore, lo si identifichi e lo si corregga *(2 punti)*

0	1	1
0	0	0
0	1	

- Assumendo che siano avvenuti al più due errori, si elenchino tutte le possibili configurazioni iniziali senza errori *(3 punti)*

0	1	1
0	0	0
0	1	

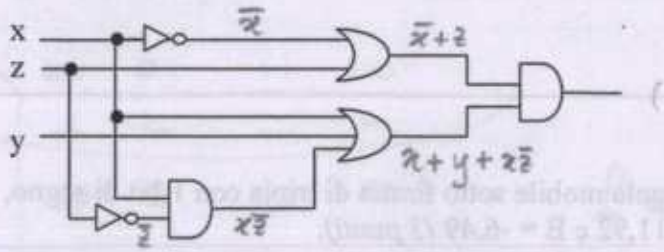
0	0	0
0	0	0
0	0	

1	1	0
0	0	0
1	1	

Esercizio 3 (2 punti). Usando gli assiomi dell'algebra di Boole, si scriva l'espressione $\overline{(a+b)(c+d)}$ con soli NOR.

$$\overline{(a+\overline{b})(c+d)} = \overline{\overline{a+\overline{b}} + \overline{c+d}} = \overline{\overline{a} + \overline{b+b} + \overline{c+d}}$$

Esercizio 4 (7 punti). Si consideri il seguente circuito combinatorio:



1. Si scriva l'espressione booleana associata al circuito *(1 punto)*.

$$(\bar{x}+z)(x+y+x\bar{z})$$

2. Dall'espressione ottenuta al punto 1 si calcoli la forma canonica SOP (o disgiuntiva) *(2 punti)*.

$$\cancel{\bar{x}x} + \bar{x}y + \cancel{\bar{x}x\bar{z}} + xz + yz + \cancel{xz\bar{z}} = \bar{x}y + xz + yz = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz + \bar{x}yz + xyz$$

$$= \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz = m_2 + m_3 + m_5 + m_7$$

3. Dall'espressione ottenuta al punto 1 si calcoli la forma canonica POS (o congiuntiva) *(2 punti)*.

$$(\bar{x}+z)(x+y+x)(x+y+\bar{z}) = (\bar{x}+z)(x+y)(x+y+\bar{z}) =$$

$$= (\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(x+y+\bar{z})(x+y+z)(x+y+\bar{z}) = (\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(x+y+\bar{z})(x+y+z)$$

$$= M_6 \cdot M_4 \cdot M_1 \cdot M_0$$

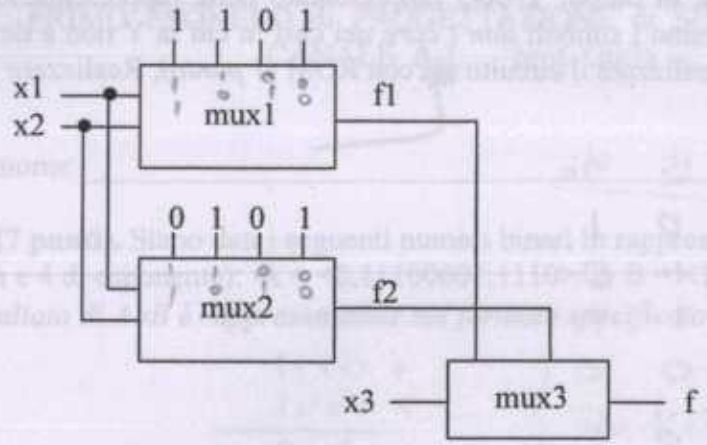
4. Si stenda la tavola di verità e si calcoli, usando le mappe di Karnaugh, la POS minimale associata alla funzione *(2 punti)*.

xyz	f
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	1
110	0
111	1

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1

$$f = (x+y)(\bar{x}+z)$$

Esercizio 5 (5 punti). Dato il seguente schema circuitale



- Scrivere l'espressione corrispondente a **f1** *(2 punti).*

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2$$

eventualm. $\bar{x}_1 x_2$

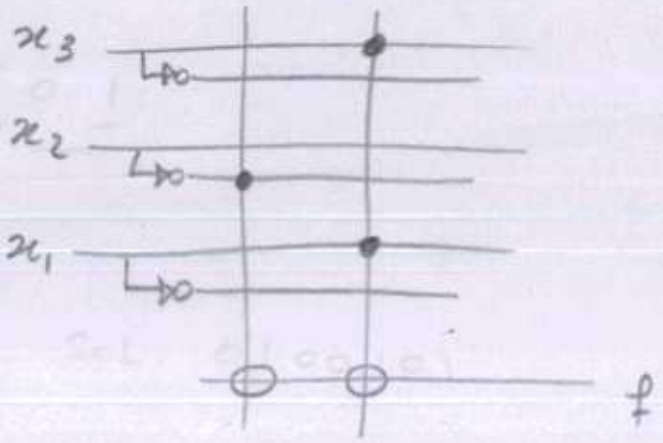
- Stendere la tavola di verità di **f** *(1 punto).*

x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	1	f_2
0	0	1	1	f_2
0	1	0	0 (ev. 1)	f_2
0	1	1	0	f_2
1	0	0	1	f_1
1	0	1	1	f_1
1	1	0	0 (ev. 1)	f_1
1	1	1	1	f_1

- Realizzare **f** con PLA *(2 punti).*

x_1 \ x_3x_2	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

$$f = \bar{x}_2 + x_3x_1$$

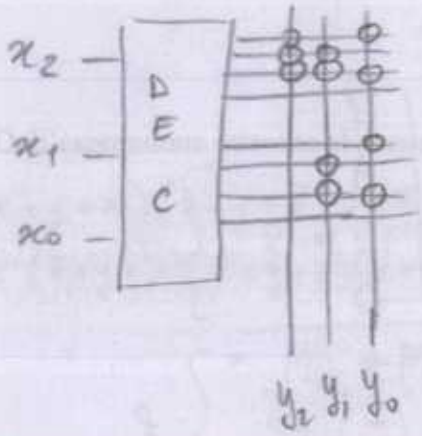


un naturale

Esercizio 6 (6 punti). Si progetti un circuito combinatorio che riceve in input X rappresentato con 3 variabili binarie ($x_2\ x_1\ x_0$) e restituisce in output Y=X-3 rappresentato nella rappresentazione in complemento a 2 con 3 bit $y_2y_1y_0$. Si usino i simboli *don't care* nei casi in cui la Y non è definita. Scrivere la tavola di verità *(2 punti)* e realizzare il circuito ~~sia~~ con ROM *(1 punto)*. Realizzare infine y_1 con porte logiche *(3 punti)*.

il minor numero di

x_2	x_1	x_0	y_2	y_1	y_0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	–	–	–



x_0 \ x_2x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	–	1

$$y_1 = \bar{x}_0 x_1 + x_0 \bar{x}_1$$

$$= x_0 \oplus x_1$$