Codici di Hamming

Il *codice di Hamming* fornisce una procedura sistematica per generare codici ridondanti correttivi, tali che sia palese l'indicazione degli eventuali bit errati nella parola codice.

Verrà considerato solo il caso di *codice di Hamming* autocorrettivo per bit singolo (in grado cioè di correggere un eventuale errore su un solo bit).

Siano:	m	bit di parola
	r	bit di ridondanza
	$n = m + r$	bit di parola codice

Ognuna dell 2^m parole legali, ha n parole codice errate a distanza di Hamming 1, ottenute cambiando un bit alla volta nella parola originaria.

Ognuna dell 2^m parole legali richiede $(n + 1)$ configurazioni di bit dedicate. Per cui deve essere:

$$\begin{aligned} 2^n &\geq 2^m (n+1) \\ 2^m \cdot 2^r &\geq 2^m (m+r+1) \\ 2^r &\geq (m+r+1) \end{aligned}$$

Codice di Hamming Autocorrettivo (4+3)

Con $m = 4$ si devono avere $r = 3$ bit di ridondanza.

Si dispongono gli m bit della parola e gli r bit di ridondanza (o di controllo) nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \multicolumn{4}{l}{m = 4 \text{ bit parola}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\
\multicolumn{4}{l}{r = 3 \text{ bit controllo}} & & &
\end{array}$$

Si dispongono i bit di controllo nelle posizioni corrispondenti a potenze di 2 (1, 2, 4, 8, ...) a partire dalla più significativa.

Ad ogni bit di controllo viene assegnato un valore di parità sulle sequenze di bit individuate come dalla seguente tabella:

1	2	3	4	5	6	7
○		○		○		○
	○	○			○	○
			○	○	○	○

Codice di Hamming Autocorrettivo (4+3)

Ogni bit di controllo deve garantire la parità sulle sequenze di bit della tabella:

r_1	r_2	m_1	r_3	m_2	m_3	m_4
1	2	3	4	5	6	7
○		○		○		○
	○	○			○	○
			○	○	○	○

bit 1 $\longrightarrow$ controlla la parità sui bit 1, 3, 5 e 7.

bit 2 $\longrightarrow$ controlla la parità sui bit 2, 3, 6 e 7.

bit 4 $\longrightarrow$ controlla la parità sui bit 4, 5, 6 e 7.

Il generico bit b è controllato dai bit r_i secondo la seguente tavola della verità:

r_3	r_2	r_1	b
		X	1
	X		2
	X	X	3
X			4
X		X	5
X	X		6
X	X	X	7

Codice di Hamming Autocorrettivo (4+3)

La rilevazione e correzione di un eventuale bit errato avviene controllando il valore di parità dei bit di controllo.

Se il valore di parità del bit di controllo è corretto si pone a zero il valore nella tabella precedente; se non è corretto si pone a 1 il valore.

ESEMPIO:

Se si riscontra errata la parità nei bit r_1 e r_3, il bit errato è $b = 5$. Infatti:

r_3	r_2	r_1	b
1	0	1	5

Se si riscontra errata la parità nei bit r_1 e r_2, il bit errato è $b = 3$. Infatti:

r_3	r_2	r_1	b
0	1	1	3

Codice di Hamming Autocorrettivo (4+3)

ESEMPIO: Si determini il codice di Hamming per la parola su $m = 4$ bit:

$$1\;0\;1\;1$$

Si mettano i bit assegnati nelle posizioni corrette:

r_1	r_2	m_1	r_3	m_2	m_3	m_4
1	2	3	4	5	6	7
		1		0	1	1

Deve essere:

– $r_1 = 0$ perchè sia pari la sequenza 1, 3, 5, 7.

– $r_2 = 1$ perchè sia pari la sequenza 2, 3, 6, 7.

– $r_3 = 0$ perchè sia pari la sequenza 4, 5, 6, 7.

Il codice di Hamming completo per la parola data risulta:

r_1	r_2	m_1	r_3	m_2	m_3	m_4
1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	0	0	1	1

Codice di Hamming Autocorrettivo (4+3)

ESEMPIO: Si supponga di avere la seguente parola codice, e di voler controllare se è corretta:

r_1	r_2	m_1	r_3	m_2	m_3	m_4
1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	1	1

Si verifica la correttezza di parità dei bit di controllo, e si individua univocamente l'eventuale bit errato:

- La sequenza 1, 3, 5, 7 è dispari (r_1 errato).
- La sequenza 2, 3, 6, 7 è dispari (r_2 errato).
- La sequenza 4, 5, 6, 7 è pari (r_3 corretto).

La parola codice data contiene un bit errato che è il bit $b = 3$. Infatti:

r_3	r_2	r_1	b
0	1	1	3

La parola codice corretta risulta quindi essere:

1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	0	0	1	1