Progettazione di Algoritmi - Appello di Febbraio 2022

Esercizio 1. [**Conta**] Dato un intero n, con $n \geq 2$, vogliamo contare il numero di modi in cui è possibile ottenere n partendo dal numero 2 e potendo effettuare le sole 3 operazioni di incremento di 1, prodotto per 2 e prodotto per 3.

Ad esempio per $n = 10$ la risposta è 9. Infatti le sequenze possibili sono:
$(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(2, 3, 4, 5, 10)$, $(2, 3, 4, 8, 9, 10)$, $(2, 3, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(2, 3, 9, 10)$, $(2, 4, 5, 10)$, $(2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(2, 4, 8, 9, 10)$, $(2, 6, 7, 8, 9, 10)$.

Progettare un algoritmo che risolve il problema in tempo $O(n)$.
Motivare BENE la correttezza e la complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 2. [**Stampa**] Progettare un algoritmo che dato un intero n stampa tutte le matrici binarie quadrate $n \times n$ dove il numero di 0 presenti in ciascuna colonna è minore o uguale al numero di 1 della colonna.

Ad esempio per $n = 2$ l'algoritmo deve stampare, non necessariamente nello stesso ordine, le seguenti 9 matrici:

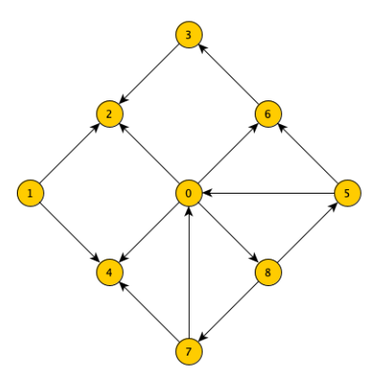
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'algoritmo proposto deve avere complessità $O(n^2 S(n))$ dove $S(n)$ è il numero di stringhe da stampare.

Motivare la correttezza e la complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 3. [**Grafi**] Considerate il grafo G in figura.

1. Quale è il numero minimo di archi da eliminare da G perché il grafo abbia sort topologici? **Motivare BENE la vostra risposta**.

2. Eliminate dal grafo G il numero minimo di archi perché questo risulti avere sort topologici e applicate al grafo così ottenuto l'algoritmo per la ricerca del sort topologico basato sulla visita in profondità. Nell'eseguire l'algoritmo qualora risultino più nodi tra cui scegliere per proseguire la visita prendete sempre quello di indice minimo. Quale è il sort topologico che si ottiene in questo modo?

G=