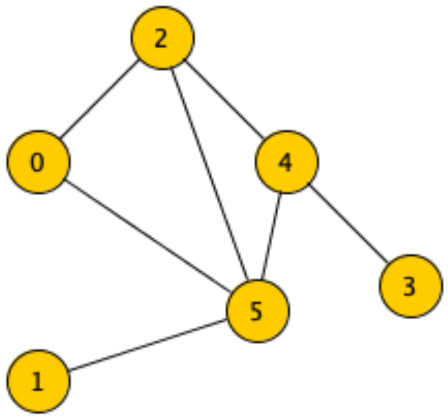
Corso di laurea in Informatica
Progettazione d'algoritmi

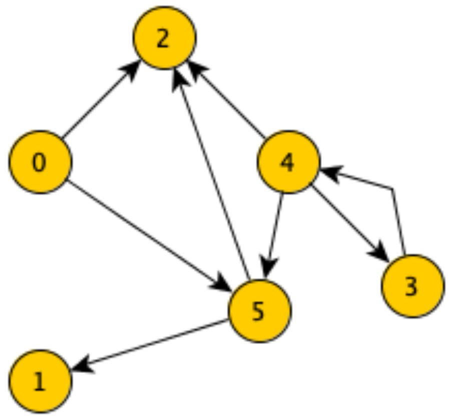
# I grafi

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

# I grafi



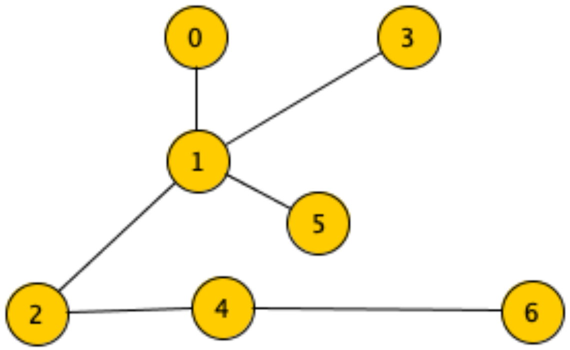




- grafi: $G(V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$.
  - $0 \leq m \leq n(n-1) = O(n^2)$ se il grafo è diretto
  - $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ se il grafo non diretto

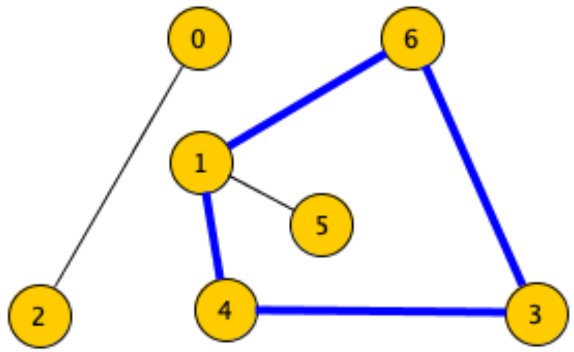
- Un grafo si dice *sparso* se $m = O(n)$, un grafo si dice *denso* se $m = \Omega(n^2)$
- esempi di grafi densi:
  - Un grafo si dice *completo* se ha tutti gli archi ( i.e. $m = \Theta(n^2)$).
  - Un grafo diretto si dice *torneo* se tra ogni coppia di nodi c'è esattamente un arco ( i.e. $m = \Theta(n^2)$).
- nota che un grafo non sparso non è necessariamente denso, ad esempio può avere $\Theta(n \log n)$ archi.

# Un esempio  di grafo sparso: l'albero

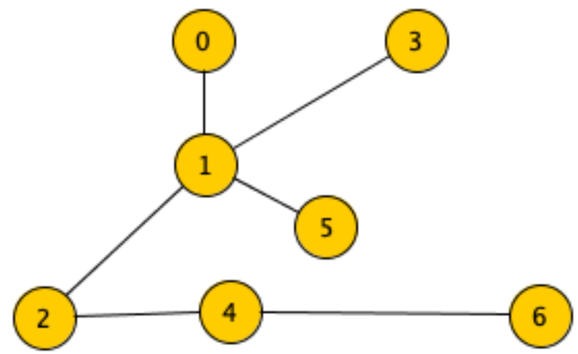
- un albero  è un grafo **connesso** senza **cicli**.




- esempio di grafo sconnesso con ciclo:



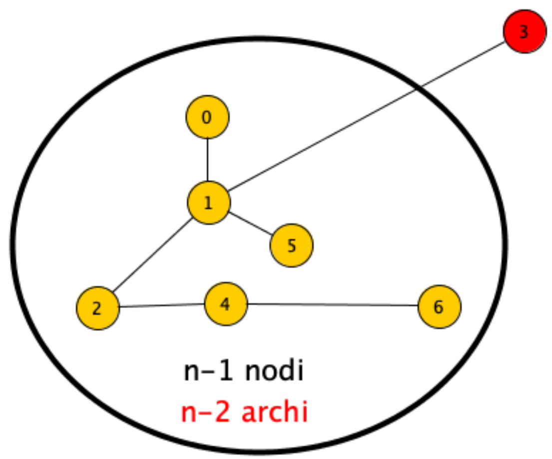
# Un esempio  di grafo sparso: l'albero




- **Un albero ha  sempre $m = n - 1$ archi.**

La prova è per induzione sul numero $n$ di nodi:

- Vero per $n = 1$ dove gli archi sono $0$.
- Assumiamolo vero per alberi di $n - 1$ nodi
- Devo sfruttare la proprietà  degli alberi di avere foglie (nodi di grado $1$).
    - per l'albero da $n$ nodi, individuo e metto da parte una foglia e l'arco che incide su quella foglia, mi rimane (grafo connesso di $n - 1$ nodi senza cicli, vale a dire un albero di $n - 1$ nodi che so per induzione avere esattamente $n - 2$ archi quindi in totale ho $n - 1$ archi.

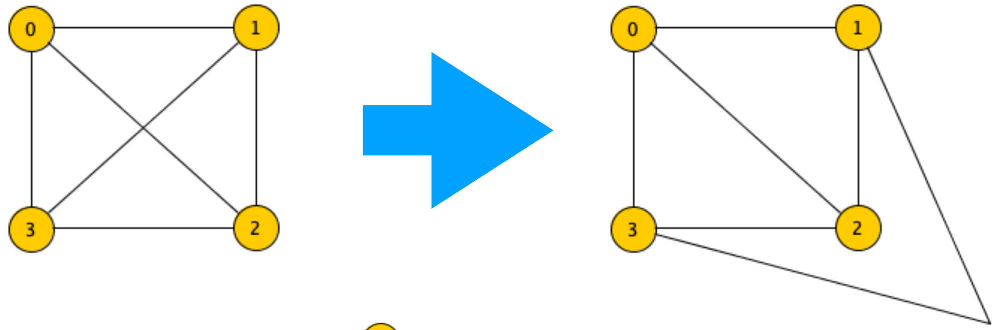



**ESERCIZIO: resta  da dimostrare che ogni albero ha almeno una foglia.**

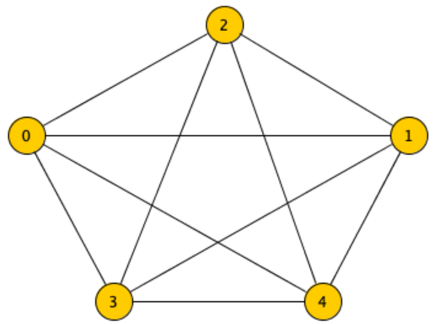
# Un esempio  di grafo sparso: il grafo planare

- **I grafi planari sono quei grafi che posso disegnare sul piano senza che gli archi si intersechino**

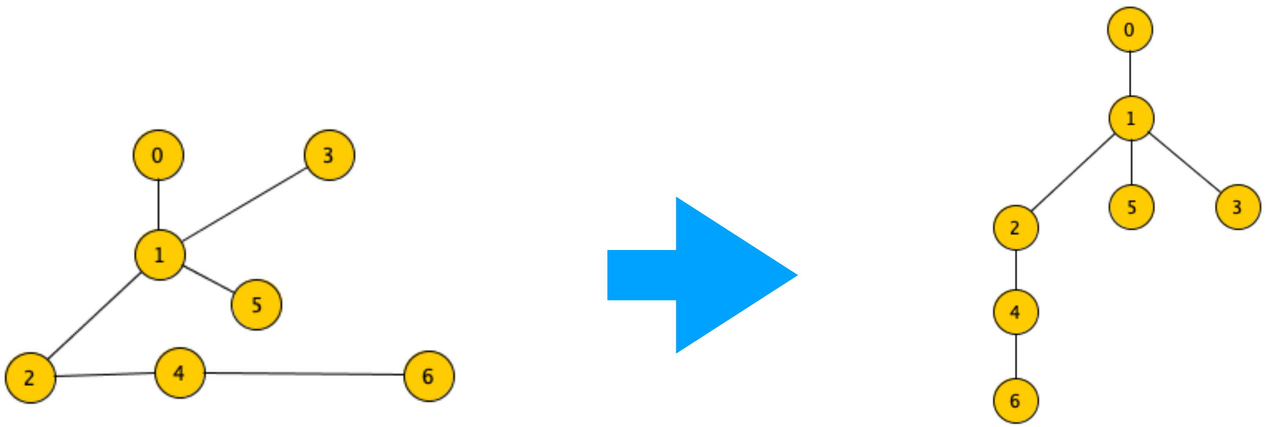
**Esempio di grafo planare:**



**Esempio di grafo NON planare:**



- **Nota che gli alberi sono un sottoinsieme dei grafi planari**



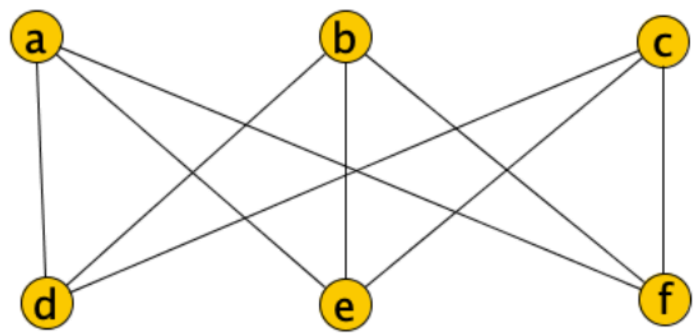
# Un esempio  di grafo sparso: il grafo planare

**Teorema (Eulero): Un grafo planare di $n > 2$ nodi ha al più $3n - 6$ archi.**

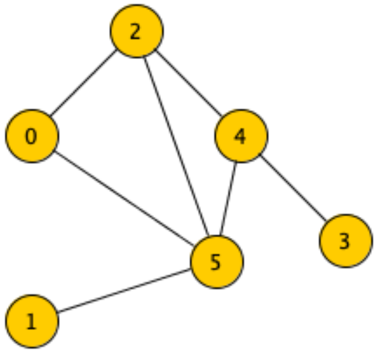
| nodi | $m = \frac{n(n-1)}{2}$ in completi | $m = 3n - 6$ max in planari |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 6 | 6 |
| 5 | 10 | 9 |
| 6 | 15 | 12 |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 10 | 45 | 24 |

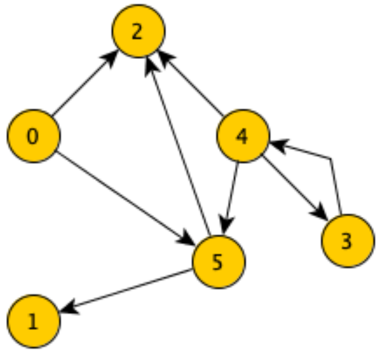
Dalla tabella deduciamo che da $n = 5$ in poi esistono di certo grafi non planari (i grafi completi)

esempio di grafo con 6 nodi non planare



# RAPPRESENTAZIONE DI GRAFI TRAMITE MATRICI BINARIE

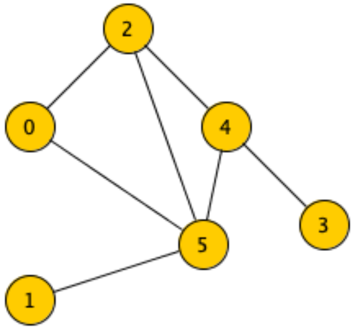


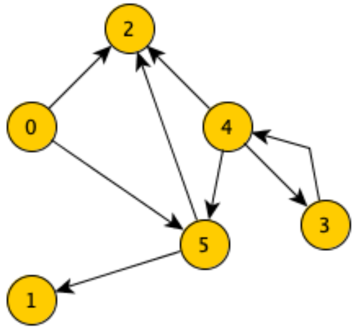




$$M[i][j] = 1 \text{ se e solo se c'è un arco diretto da } i \text{ a } j$$

$$M = \begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

# RAPPRESENTAZIONE DI GRAFI TRAMITE LISTE DI ADIACENZA




Utilizzo una lista di liste $G$, la lista ha tanti elementi quanti sono i nodi del grafo $G$. $G[x]$ è una lista contenente i nodi adiacenti al nodo $x$ vale a dire quelli raggiunti da archi che partono da $x$.

```
G=[
    [2,5],
    [5],
    [0,4,5],
    [4],
    [2,3,5],
    [0,1,2,4]
  ]
```

```
G=[
    [2,5],
    [],
    [],
    [4],
    [2,3,5],
    [0,1]
  ]
```

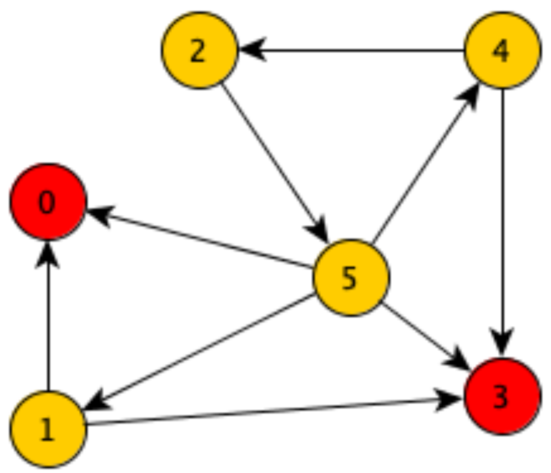
NOTE: vantaggi e svantaggi rispetto alla rappresentazione tramite matrice

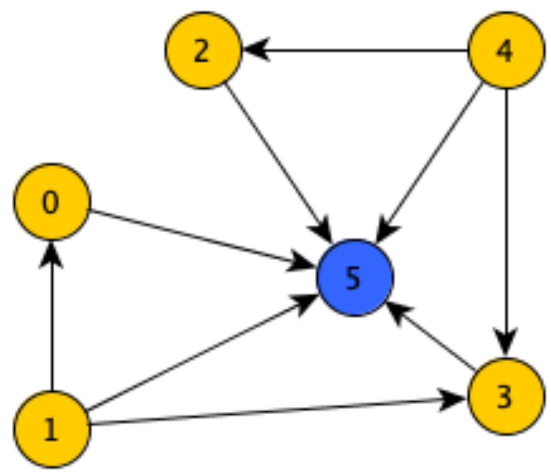
- Notevole risparmio di spazio nel caso di grafi sparsi
- Vedere se due archi son connessi o meno può costare ora anche $O(n)$

# ESERCIZIO

- In un grafo diretto **un pozzo** è un nodo senza archi uscenti.

- In un grafo diretto **un pozzo universale** è un pozzo verso cui tutti gli altri nodi hanno un arco




- In un grafo diretto possono essere presenti fino ad n pozzi,
- il pozzo universale se c'è è unico

# Un algoritmo di tempo $O(n^2)$ per verificare se un Grafo diretto $M$ ha un pozzo universale:

$$\begin{array}{|cccccccc|}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

```
def test_pozzoU(x,M):
    for j in range(len(M)):
        if M[x][j]: return False
    for i in range(len(M)):
        if i!=x and M[i][x]==0: return False
    return True


def pozzoU2(M):
    '''restituisce True se il grafo M ha pozzo universale, False Altrimenti'''
    for x in range(len(M)):
        if test_pozzoU(x,M):
            return True
    return False
```

**Complessità = $O(n) \times O(n) = O(n^2)$,**

**si può far vedere che al caso pessimo è $\Omega\left(n^2\right)$**

Un algoritmo di tempo $\Theta(n)$ per verificare se un Grafo diretto M ha un pozzo universale:

$$M[i][j] = \begin{cases} 1 & i \text{ non è pozzo (universale)} \\ 0 & j \text{ non è pozzo universale} \end{cases}$$

Con un semplice test posso eliminare uno dei nodi dai possibili pozzi universali.

Dopo n-1 test mi resta un unico nodo da controllare:

```python
def pozzoU2(M):
    '''restituisce True se il grafo M ha pozzo universale,
    False Altrimenti'''
    n= len(M)
    L = [x for x in range(n)]
    while len(L)>1:
        a = L.pop()
        b = L.pop()
        if M[a][b]:
            L.append(b)
        else:
            L.append(a)
    x = L.pop()
    for j in range(n):
        if M[x][j]:
            return False
    for i in range(n):
        if i != x and M[i][x] == 0:
            return False
    return True
```

Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi

# Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sia $G$ un grafo non-diretto:

- Dimostrare che se tutti i vertici di $G$ hanno grado almeno due allora nel grafo c'è almeno un ciclo.
  Se il grado di ogni vertice è esattamente due, si può affermare che G e un ciclo?

- Dimostrare che la somma dei gradi dei nodi di $G$ è sempre un numero pari.

- Dimostrare che in $G$ i nodi di grado dispari sono sempre in numero pari.

- Dimostrare che se $G$ ha almeno due nodi allora in $G$ ci sono due nodi con lo stesso grado.

- Assumete che $G$ sia un grafo completo di $n$ nodi con $n \geq 3$ e che i suoi archi siano stati colorati con due colori. Quale è il minimo valore di $n$ per cui si può essere sicuri che $G$ contiene un ciclo di 3 nodi monocromatico?

- Dimostrare che il grafo di 6 nodi nella figura in basso non è planare.