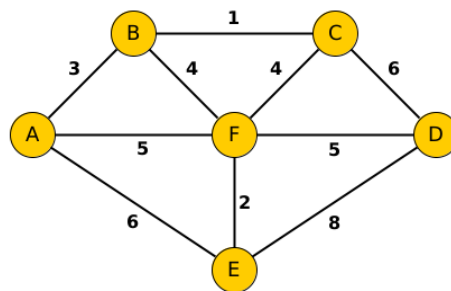


Progettazione degli Algoritmi - Febbraio 2023

9 Febbraio, 2023

Esercizio 1. Grafi: Applicate l'algoritmo di Dijkstra e determinate la distanza minima di ogni vertice del grafo qui sotto, a partite dal vertice etichettato A. Devono essere rappresentati: il vettore dei genitori, che codifica l'albero dei cammini minimi, il vettore delle distanze minime, e un disegno dell'albero dei cammini minimi.

Nel caso in cui l'algoritmo si trovi a scegliere tra due vertici che hanno la stessa priorità, sceglierà prima quello con l'etichetta che viene prima in ordine alfabetico.



Esercizio 2. Cammini sopra la diagonale: Considerate una griglia $n \times n$ con $n > 0$. Un cammino valido su questa griglia deve partire dalla cella di coordinate $(0, 0)$ in alto a sinistra e deve arrivare alla posizione di coordinate $(n - 1, n - 1)$ in basso a destra. È possibile muoversi solo su celle adiacenti, andando di un passo verso il basso oppure di un passo verso destra. Oltretutto al cammino è vietato toccare le celle di coordinate (i, j) con $i > j$, in altre parole è vietato toccare celle che si trovino sotto alla diagonale che va da $(0, 0)$ a $(n - 1, n - 1)$

Ad esempio, per $n = 4$ la risposta deve essere 5, abbiamo infatti i seguenti possibili cammini, indicati come sequenze di passi a destra o verso il basso.

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\downarrow$ $\rightarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow$ $\rightarrow\rightarrow\downarrow\downarrow\rightarrow$ $\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow$ $\rightarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow$

Progettate un algoritmo che calcoli il numero di cammini validi e che impieghi tempo $O(n^2)$.

Motivare BENE la correttezza e la complessità dell'algoritmo proposto.

Esercizio 3. Stampa: Fissiamo n e k con $n \geq k \geq 1$. Definiamo **valida** una sequenza di lunghezza n contenente interi da 0 a $k - 1$, e che contenga ognuno di questi k valori almeno una volta. Ad esempio se abbiamo $n = 6$ e $k = 4$, allora la sequenza 013212 è **valida** mentre 020323 **non è valida**.

Facciamo un altro esempio: tutte le sequenze valide per $n = 4$ e $k = 3$ sono

0012 0021 0102 0112 0120 0121 0122 0201 0210 0211 0212 0221 1002 1012 1020
1021 1022 1102 1120 1200 1201 1202 1210 1220 2001 2010 2011 2012 2021 2100
2101 2102 2110 2120 2201 2210

Trovate un algoritmo che dati n ed k stampi tutte e sole le sequenze valide. L'algoritmo deve avere complessità $O(n \cdot k \cdot S(n, k))$ dove $S(n, k)$ è il numero di sequenze valide esistenti.

Motivare BENE la correttezza e la complessità dell'algoritmo proposto, calcolando il numero di nodi interni e di foglie nell'albero di computazione, e mettendoli in corrispondenza con $S(n, k)$.