SATISFIABILITY

(soddisfacibilità)

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $\qquad$ $x_i = \{0,1\}$ o $\{V,F\}$ o $\{T,F\}$

CNF: Congiunzioni di Disgiunzioni (AND di OR)

LETTERALI

CONGIUNZIONE SPESSO OMESSA, IN QUESTA SCRITTURA

$$\underbrace{(x_2 \vee x_3)}_{\text{CLAUSOLA}}(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_1)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_3)$$

DISGIUNZIONE

VALORE OPPOSTO: $\bar{x}_i$ indica NOT x_i

Se $x_i = 0 \rightarrow (\text{NOT } x_i) = 1$

Se $x_i = 1 \rightarrow (\text{NOT } x_i) = 0$

$$\underbrace{(x_2 \vee x_3)}_{1\ 1 \,\to\, 1}\underbrace{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)}_{1\ 0 \,\to\, 1}\underbrace{(\bar{x}_2 \vee x_1)}_{0\ 0 \,\to\, 0}\underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3)}_{0\ 0 \,\to\, 0}$$

$x_1\, x_2\, x_3 = 0\ 1\ 1$

NON SODDISFATTA

$$\underbrace{(x_2 \vee x_3)}_{1\ 0 \,\to\, 1}\underbrace{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)}_{0\ 1 \,\to\, 1}\underbrace{(\bar{x}_2 \vee x_1)}_{0\ 1 \,\to\, 1}\cdot\underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_3)}_{1\ 1 \,\to\, 1}$$

$x_1\, x_2\, x_3 = 1\ 1\ 0$

SODDISFATTA

Problema della soddisfacibilità

- Data una formula φ in forma CNF

  decidere se la formula φ è

SODDISFACIBILE, ovvero $\exists\, x_1 \dots x_n$ t.c. $\varphi(x_1, \dots x_n) = 1$

INSODDISFACIBILE, ovvero $\forall\, x_1, \dots, x_n$ si verifica $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$

ESEMPIO:

$(x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_1)(x_1 \vee \bar{x}_3)$ SODDISFACIBILE

$(x_2 \vee x_3)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)\cdot \bar{x}_2 \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3)$ INSODDISFACIBILE

perché $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\rightarrow$ simultaneamente $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$ (impossibile)

OSSERVAZIONI:

Data una formula CNF φ con n variabili

- ci sono 2^n possibili assegnamenti
- è possibile DECIDERE la soddisfacibilità in tempo

$$O(\underbrace{|\varphi|}_{\text{lunghezza della formula}} \cdot 2^n)$$

ESERCIZIO

Verifica le due osservazioni precedenti

Problema SAT: decidi la soddisfacibilità di una CNF, φ

Problema 3-SAT:
decidi la soddisfacibilità di una formula CNF φ
tale che OGNI CLAUSOLA ha al massimo
3 letterali per ogni clausola

E.g. $(x_1 \vee x_2 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_5 \vee x_7) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_4)$

Esercizio

Mostrare che il problema 3-SAT
può essere risolto in tempo
$O\left(|\varphi| \cdot \left(\sqrt[3]{7}\right)^n\right)$ → invece che 2^n per SAT

Hint: osservate che se una clausola ha 2 letterali falsificati
allora il 3° deve essere vero, per soddisfare