Corso di laurea in Informatica
Algoritmi 1
A.A. 2025/2026

Esercizi riepilogativi

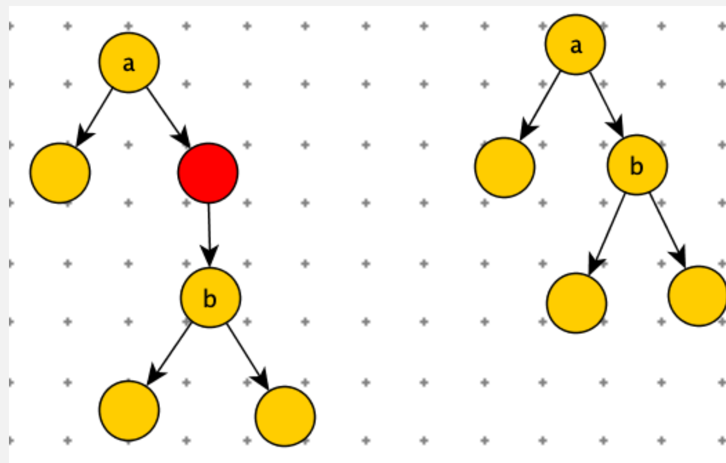
Tiziana Calamoneri

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

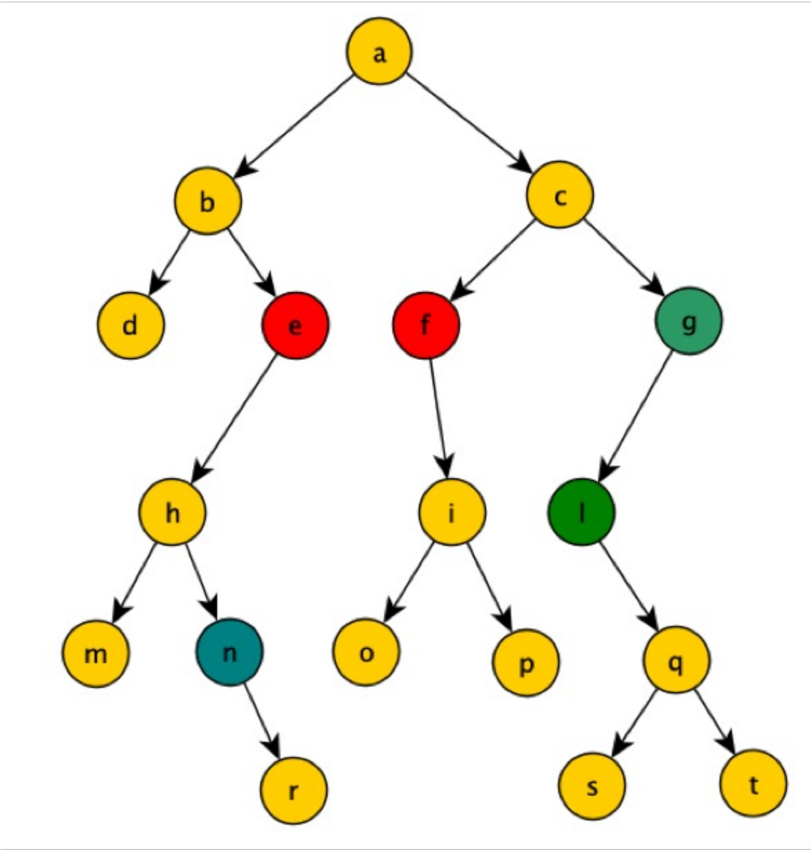
Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

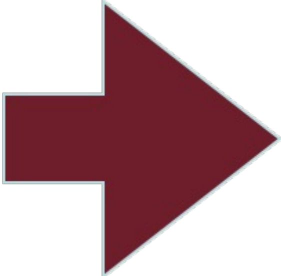
Esercizio svolto 1 (1)

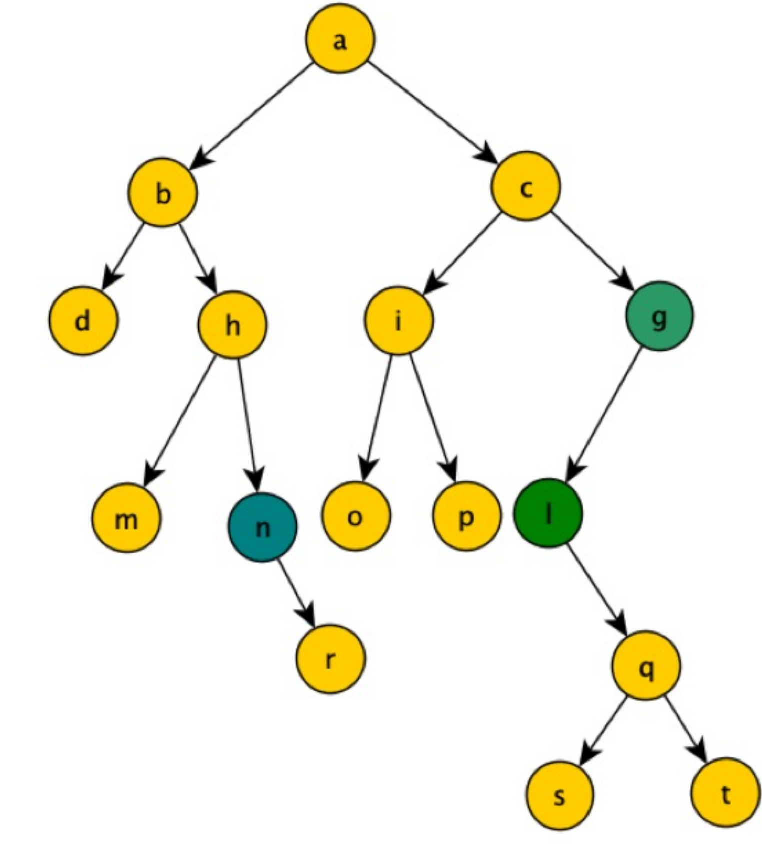
Esercizio 1. Scrivere una funzione che, dato in input un albero binario T con n chiavi, cancelli tutti i nodi interni con un solo figlio che abbiano sia il padre che il figlio dotati di due figli. Assumere che l'albero sia memorizzato tramite record e puntatori e che ogni nodo abbia anche il puntatore al padre.



Esercizio svolto 1 (2)







Esercizio svolto 1 (3)

```
def cancella(x):
    if not x or (not x.left and not x>right): #x non ha  figli
        return
    if x.left and x.right: #x ha due figli
        cancella(x.left)
        cancella(x.right)
        return
    if x.left and not x.right:
        p=x.left
    else:
        p=x.right      # p e' l'unico figlio di x
    cancella(p)
    if x.parent and x.parent.left and x.parent.right and
                                    p.left and p.right:
             #il padre ed il figlio di x hanno due figli
        if x.parent.left==x:
            x.parent.left=p
        else:
            x.parent.right=p
       p.parent=x.parent
```

Esercizio svolto 2 (1)

Esercizio 2. Progettare un algoritmo che, dato un array A con n interi ed un intero x, determini se in A esistono due interi la cui somma è x.

L’algoritmo deve avere costo O(n log n).

Esempio:

A=[0,-1,2,-3,1] e x=-2 l’algoritmo restituisce TRUE (elementi -3 e 1)

Esercizio svolto 2 (2)

IDEE: E' chiaro che non si può fissare un elemento y di A e poi scorrere tutto A alla ricerca di un elemento che, sommato ad y, dia x perché il costo diverrebbe $O(n^2)$.

Il costo richiesto ci suggerisce di passare per un ordinamento…

Esercizio svolto 2 (3)

…

1. Ordiniamo l'array A

2. Usiamo due indici i e j, inizializzati al primo ed all'ultimo elemento dell'array, rispettivamente.

I due indici scorrono l'array uno da sinistra e l'altro da destra, fino ad incontrarsi o a trovare la coppia cercata.

Ad ogni passo si considera A[i]+A[j]:

- se A[i]+A[j]=x l'algoritmo termina con TRUE
- se A[i]+A[j]<x viene incrementato i
- se A[i]+A[j]>x viene decrementato j

Esercizio svolto 2 (4)

...

La parte 1. richiede tempo O(n log n), utilizzando un qualunque algoritmo d'ordinamento efficiente.

La parte 2. esegue al più n passi costanti: tempo O(n).

Costo totale: O(n log n)

OSSERVAZIONE

ad ogni passo, essendo l'array ordinato, l'elemento scartato a seguito della variazione dell'indice non può più appartenere ad alcuna coppia la cui somma dia x. Segue la correttezza.

Esercizio svolto 2 (5)

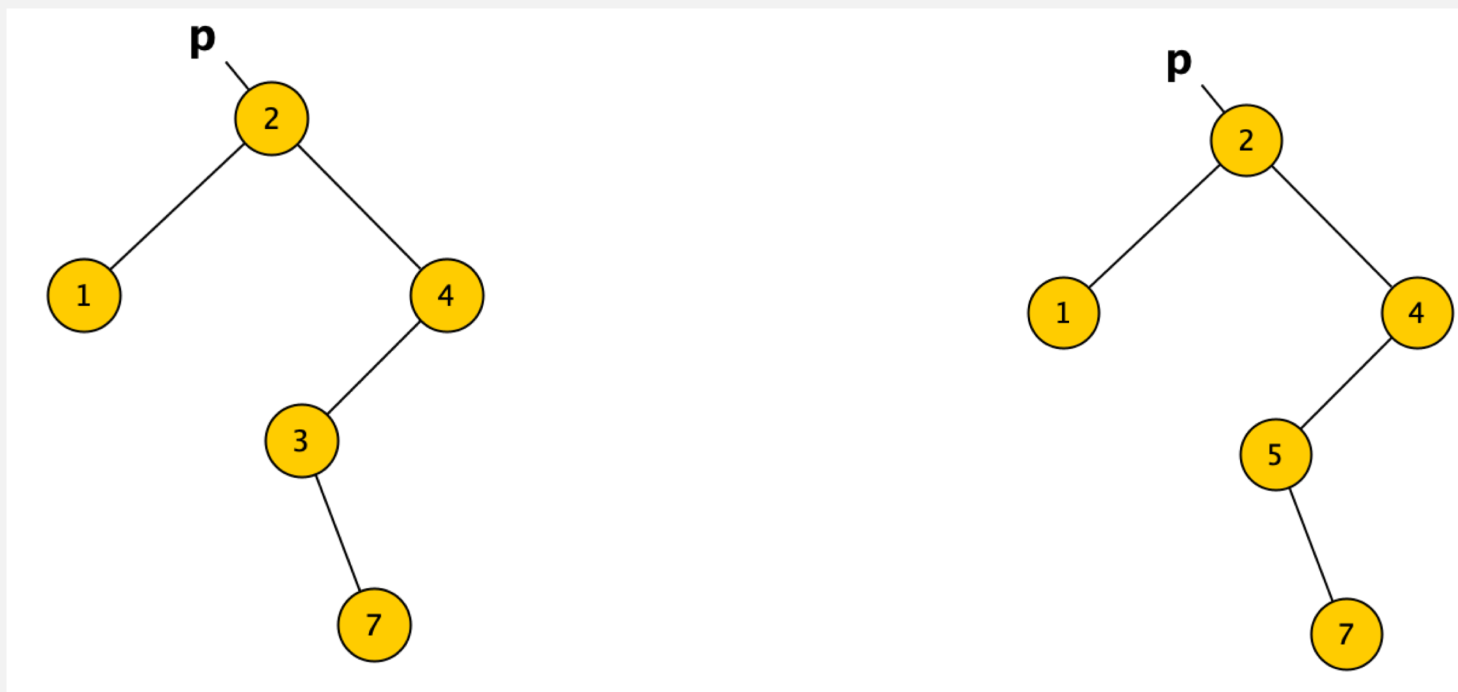
```
def cercaCoppia(A,x)
    Ordina(A)
    i,j=0,len(A)-1;
    while i<j:
        if A[i]+A[j]==x: return True;
        if A[i]+A[j]<x:
            i=i+1
        else:
            j=j-1
    return False
```

Esercizio svolto 3 (1)

Esercizio 3. Progettare una funzione che, dato il puntatore alla radice di un albero binario non vuoto memorizzato tramite record e puntatori, verifichi se nell'albero è presente un cammino radice-foglia la cui sequenza di chiavi incontrate sia strettamente crescente.
L'algoritmo deve avere costo computazionale $O(n)$ dove n è il numero di nodi dell'albero.
…

Esercizio svolto 3 (2)

Esempio: per l'albero a sinistra la risposta deve essere *False* mentre per l'albero di destra la risposta deve essere *True* (grazie al cammino 2, 4, 5, 7).



Esercizio svolto 3 (3)

OSSERVZIONE:
partendo dalla radice, non possiamo sapere se l'ipotetico cammino cercato sia quello di destra o quello di sinistra, ma se partiamo dalle foglie la verifica risulta più semplice, perché ogni nodo ha un unico padre…
dunque, anche in questo caso, effettuiamo una visita in post-ordine, in cui ogni nodo restituisce True se, risalendo al padre, il cammino percorso dalla foglia ha le proprietà richieste, e False altrimenti:

Esercizio svolto 3 (4)

```
def es(p):
    if p.left == p.right == None:
        return True
    if p.left!=None and es(p.left) and p.key <p.left.key:
        return True
    return p.right!=None and es(p.right) and p.key <p.right.key
```

Il costo è quello di una visita.

Esercizio svolto 4 (1)

Esercizio 4. Dati due interi x ed y, definiamo la loro **distanza** come dist(x; y) = |x-y|.

Sia dato un ABR T, contenente chiavi intere, memorizzato mediante record e puntatori.

Si progetti un algoritmo efficiente che determini la distanza massima tra due chiavi di T, e se ne calcoli il costo computazionale.

Si discuta brevemente sul modo in cui (eventualmente) cambiano l'algoritmo ed il costo computazionale nel caso in cui T sia un albero AVL.

Esercizio svolto 4 (2)

IDEA:

In un ABR le chiavi a distanza massima sono necessariamente la chiave minima e quella massima contenute nell'ABR.

Sappiamo che per trovare il minimo in un ABR bisogna scendere a sinistra finché possibile e per trovare il massimo bisogna scendere a destra finché possibile.

Esercizio svolto 4 (3)

```
def MinMax(p):
  if (p == None): return None
  p_min = p; p_max = p;
  while(p_min->left≠None):
    p_min = p_min->left
  while(p_max->right≠None):
    p_max = p_max->right
  return p_max->info-p_min->info
```

La funzione ha costo O(h), dove h è l'altezza dell'albero (sia esso solo ABR o anche AVL).

Esercizio svolto 4 (4)

In un generico ABR si ha $h = O(n)$, mentre in un AVL si ha che $h = \Theta(\log n)$.

Per un AVL l'algoritmo non cambia nella sostanza. Quello che cambia è il costo computazionale, che scende da $O(n)$ a $\Theta(\log n)$.

Esercizio svolto 5 (1)

Esercizio 5. Progettare un algoritmo che, dati i puntatori p e q a due liste di interi, verifica se la prima lista possa ottenersi dalla seconda cancellando eventualmente dei nodi e mantenendo gli altri nell'ordine in cui sono.

L'algoritmo deve avere costo computazionale O(m) dove m è il numero di elementi della seconda lista.

Esempio:

Per p ->1->2->3->4 e

q ->5->**1**->**2**->1->2->**3**->5->6->**4**

l'algoritmo risponde `True`

Esercizio svolto 5 (2)

IDEA. Uso due puntatori p e q per scorrere le due liste:

Se le chiavi puntate da p e q coincidono, allora ho trovato un elemento della prima lista e sposto in avanti i puntatori di entrambe le liste.

Se al contrario le chiavi non coincidono allora sposto solo il puntatore della seconda lista.

Termino con True se giungo al termine della prima lista mentre termino con False se giungo al termine della seconda lista senza aver terminato la prima.

Costo computazionale: Ad ogni passo il puntatore della seconda lista si incrementa quindi il costo è O(m).

Esercizio svolto 5 (3)

```
def es(p',q'):  #all'inizio p'=p e q'=q
    while p' and q':
        if p'->key==q'->key:
            p'=p'->next
            q'=q'->next
        else: q'=q'->next
    if p': return False
    return True
```

Esercizio svolto 6 (1)

Esercizio 6. Siano A e B i puntatori alle radici di due ABR memorizzati tramite record e puntatori di cui sia noto che hanno rispettivamente n_1 ed n_2 nodi.

Progettare un algoritmo che, presi in input A e B, restituisca in output un array ordinato di lunghezza massima $n_1 + n_2$ contenente le chiavi dei due alberi (senza ripetizioni).

L'algoritmo deve essere lineare nella somma del numero dei nodi dei due alberi.

Esercizio svolto 6 (2)

IDEA 1. Si potrebbe pensare di ricopiare gli elementi di un ABR in un array e poi ordinarlo. Ma questo costerebbe troppo, non potendo utilizzare il counting sort…

IDEA 2. Sappiamo che la visita inorder su un ABR produce la sequenza ordinata ed ha un costo lineare nel numero di nodi dell'ABR.

Sappiamo anche che la funzione `Fondi()` del `Mergesort`, partendo da due array ordinati, produce un unico array ordinato ed ha un costo lineare nel numero totale di elementi (ma attenzione ai duplicati!).

Esercizio svolto 6 (3)

SOLUZIONE

1. visita inorder su ciascuno dei due ABR, riempiendo due arrays: costo $\Theta(n_1)$+ $\Theta(n_2)$
2. fusione del `Mergesort`, modificata per eliminare gli eventuali doppioni (esercizio già visto): costo $\Theta(n_1 + n_2)$

PSEUDOCODICE PER ESERCIZIO

Esercizio svolto 7 (1)
(esame lug. '21)

Esercizio 7. Dato un albero binario T, radicato e con n nodi, definiamo un nodo u di T *equilibrato* se il sottoalbero sinistro di u e il sottoalbero destro di u hanno entrambi lo stesso numero di nodi.

Progettare un algoritmo che, dato il puntatore r alla radice di un albero binario memorizzato tramite record e puntatori, restituisca in tempo O(n) il numero dei suoi nodi equilibrati.

Esercizio svolto 7 (2)

Soluzione. si effettua una visita post-order dell’albero. Ogni nodo restituisce al padre:

- il numero di nodi presenti nel suo sottoalbero
- il numero di nodi equilibrati presenti nel suo sottoalbero.

Le foglie restituiscono i valori 0 e 0.

Esercizio svolto 7 (3)

… Ciascun nodo interno, ricevendo queste informazioni, è in grado di trasmettere a sua volta le giuste informazioni al padre:

- aggiungendo 1 alla somma dei nodi del sottoalbero sinistro e del sottoalbero destro può calcolare il numero di nodi del suo sottoalbero
- il numero di nodi equilibrati nel suo sottoalb. è la somma dei nodi equilibrati del sottoalb. sin. + nodi equilibrati del sottoalb. des. + eventualmente 1 (se il nodo stesso è equilibrato).

Esercizio svolto 7 (4)

… Il numero di nodi equilibrati restituito dalla radice è la soluzione al problema.

```
def esame3(r):
    if r==None:
        return 0, 0
    equilibratiS, nodiS =esame3(r.left)
    equilibratiD, nodiD =esame3(r.right)
    equilibrati = equilibratiS + equilibratiD
    if nodiS == nodiD: equilibrati+ = 1
    return equilibrati, nodiS + nodiD + 1
```

Esercizio svolto 8 (1)
(esame giu. '22)

Esercizio 8. Sia A un array di n interi positivi. Con la coppia ordinata (i,j), $0 \leq i \leq j < n$, rappresentiamo il suo sottoarray che parte dall'elemento in posizione i e termina con l'elemento in posizione j. Definiamo *valore* di un sottoarray come la somma dei suoi elementi.

Progettare un algoritmo che, dato A ed un intero positivo s, restituisca la coppia ordinata che rappresenta il sottoarray di A più a sinistra che ha valore s. Se un tale sottoarray non esiste, la funzione deve restituire `None`.

L'algoritmo deve avere costo computazionale O(n).

Esercizio svolto 8 (2)

Ad esempio, per A = [1,3,5,2,9,3,3,1,6] con s = 7, l'algoritmo deve restituire la coppia (2, 3) (ci sono infatti in A tre sottoarray con valore 7 le cui coppie nell'ordine da sinistra a destra sono (2, 3), (5, 7), (7, 8)).

Con s = 21 l'algoritmo deve restituire None in quanto A non ha sottoarray con valore 21.

Esercizio svolto 8 (3)

Soluzione.

Consideriamo i vari sottoarray di A utilizzando:

- due indici i e j al primo e all’ultimo elemento del sottoarray
- una variabile tot con il valore del sottoarray.

Inizializziamo i due indici a 0 e di conseguenza tot ad A[0].

Incrementiamo di volta in volta gli indici distinguendo 3 possibili casi:

Esercizio svolto 8 (4)

1. il valore del sottoarray in esame è inferiore ad s:
   bisognerà incrementare j aggiungendo un altro elemento al sottoarray.
2. Il valore del nuovo array sarà tot + A[j].
3. il valore del sottoarray in esame è s:
   abbiamo trovato il sottoarray e restituiamo i e j.
4. il valore del sottoarray è superiore ad s:
   dobbiamo incrementare i escludendo il primo elemento dal sottoarray.
   Il valore del nuovo array sarà tot − A[i − 1]

Esercizio svolto 8 (5)

…

Ovviamente con le varie operazione di incremento di i e j dobbiamo far attenzione che si abbia sempre i ≤ j e j < n.

```
def es2(A,s):
    i=j=tot=0
    while j<len(A):
        print(i,j)
        tot+=A[j]
        while tot>s:
            tot-=A[i]
            i+=1
        if tot==s: return i,j
        j+=1
    return None
```

il costo dipende dal numero di iterazioni dei `while`. Ad ogni iterazione del `while` più interno si incrementa l'indice i e ad ogni iterazione del `while` più esterno si incrementa l'indice j; quindi il numero di iterazioni è Θ(n).

Esercizio svolto 9 (1)

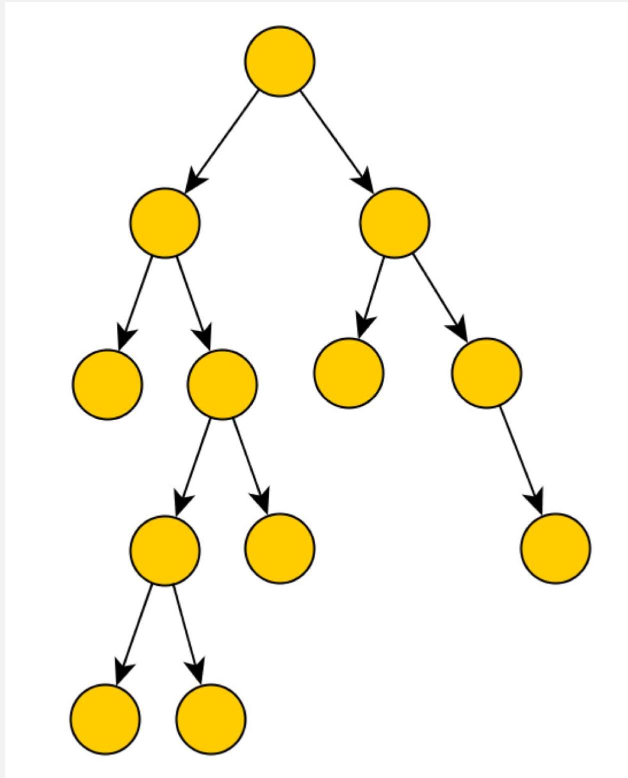
Esercizio 9. In un albero binario sono presenti nodi con un solo figlio, nodi con due figli e nodi senza figli (le foglie).

Progettare un algoritmo che, dato il puntatore alla radice di un albero binario di n nodi, restituisca la terna di interi (x,y,z) dove x è il numero di nodi con due figli, y il numero di nodi con 1 figlio e z il numero di foglie.

L'algoritmo deve avere costo computazionale O(n).

…

Esercizio svolto 9 (2)



Ad esempio per l’albero binario in figura l’algoritmo deve restituire la terna (5, 1, 6).

Esercizio svolto 9 (3)

Di nuovo, è necessario che ciascun nodo riceva informazioni da entrambi i suoi figli e poi le rielabori per inviarle a suo padre. Per questo, la funzione seguirà una filosofia in post-ordine.

Ogni nodo restituisce al padre la terna corrispondente al proprio sottoalbero:

- le foglie restituiscono la terna (0,0,1);
- i nodi interni ricavano una terna da ciascuno dei figli, le sommano in una nuova terna incrementando di 1 la componente corrispondente alla sua situazione. Restituisce infine al padre la terna così calcolata.

Esercizio svolto 9 (4)

```
def es(p):
    if p== None:
        return 0,0,0
    if p.left == p.right == None:
        return 0, 0, 1
    if p.left != None:
        dueS, unoS, zeroS = es(p.left)
    if p.right != None:
        dueD, unoD, zeroD = es(p.right)
    if p.left == None:
        return dueD, unoD + 1, zeroD
    if p.right == None:
        return dueS, unoS + 1, zeroS
    return dueS + dueD + 1, unoS + unoD, zeroS + zeroD
```

Esercizio svolto 10 (1)

Esercizio 10. Siano date due liste puntate, ciascuna priva di duplicati, ordinate in modo non decrescente.
Progettare un algoritmo che, dati i puntatori p e q alle teste delle due liste, restituisca il puntatore alla testa di una terza lista contenente le chiavi comuni alle due liste.

Non è importante l'ordine con cui le chiavi compaiono nella terza lista ma questa non deve contenere duplicati.

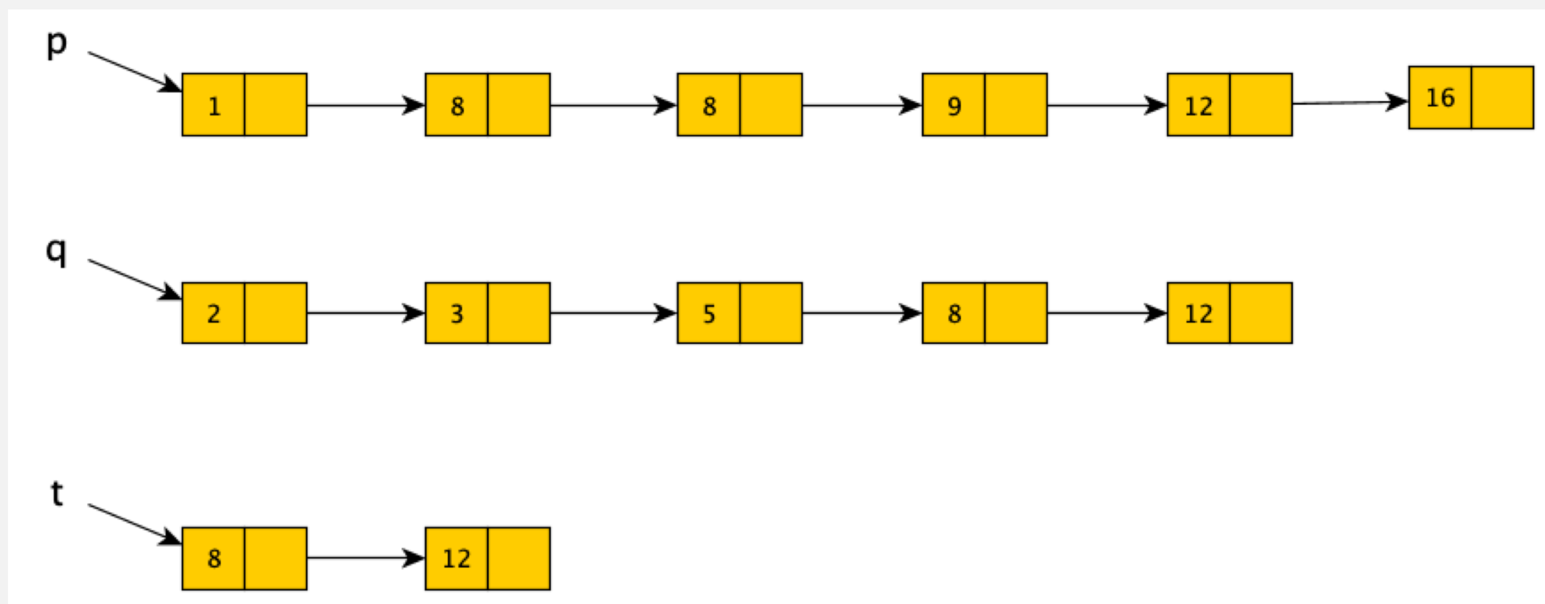
Le due liste di partenza non vanno alterate.

La procedura deve avere costo O(n+m) dove n e m sono le lunghezze delle due liste.

…

Esercizio svolto 10 (2)

Esempio: per le due liste p e q la lista da restituire è la lista t:



Descrivere l'algoritmo, scrivere lo pseudocodice e dimostrare il costo computazionale.

Esercizio svolto 10 (3)

IDEA:

Possiamo implementare una modifica della funzione `Fondi` del `MergeSort`:

- Si scorrono le due liste a partire dal loro primo elemento.
- Se i due puntatori puntano alla stessa chiave, questa viene inserita in testa alla lista t ed entrambi i puntatori scorrono
- Se, al contrario, i due puntatori puntano a chiavi distinte, la minore non può trovarsi anche nell'altra lista ed il puntatore corrispondente può scorrere
- Appena uno dei due puntatori arriva a fine lista, la procedura termina restituendo t.

Esercizio svolto 10 (4)

L'idea è corretta. Rispetta il limite di costo richiesto?

- Ad ogni iterazione almeno una dei due puntatori viene incrementato quindi la procedura termina dopo al più $O(n + m)$ iterazioni.
- Ogni iterazione è costante, perché si tratta di verificare la relazione tra le due chiavi puntate da p e q.

Esercizio svolto 10 (5)

```
def es(p,q):
    t=None
    while p!=None and q!= None:
        if p.key == q.key:
            t=Nodo(p.key,t)
            while p.next!= None and p.next==p.key: p=p.next
            p=p.next
            while q.next!= None and q.next==q.key: q=q.next
            q=q.next
        elif p.key<q.key:
            while p.next!= None and p.next==p.key: p=p.next
            p=p.next
        else:
            while q.next!= None and q.next==q.key: q=q.next
            q=q.next
    return t
```