

Corso di laurea in Informatica
Algoritmi 1
A.A. 2025/26

Esercizi sulle Equazioni di ricorrenza

Tiziana Calamoneri



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Slides realizzate sulla base di quelle preparate da T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di Informatica Generale tenuto a distanza nell'A.A. 2019/20

Esercizio 1 (1)

Risolvere con tutti e 4 i metodi:

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)=\Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(n) = 2(2T(n/2^2) + \Theta(n/2^1)) + \Theta(n) = \\&= 2^2T(n/2^2) + 2\Theta(n/2) + \Theta(n) = \\&= 2^2(2T(n/2^3) + \Theta(n/2^2)) + 2\Theta(n) = 2^3T(n/2^3) + 3\Theta(n) = \dots = \\&= 2^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = 2^k T(n/2^k) + k \Theta(n) = \dots\end{aligned}$$

Esercizio 1 (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

...

$$T(n) = 2^k T(n/2^k) + k \Theta(n) = \dots$$

$$\dots (\text{finché } n/2^k=1 \text{ cioè se e solo se } k=\log n) \dots = \\ = 2^{\log n} T(1) + \log n \Theta(n) =$$

$$(\text{ricordando che } 2^{\log n} = n = \Theta(n))$$

$$= n \Theta(1) + \log n \Theta(n) = \Theta(n \log n).$$

Dunque la soluzione tramite questo metodo è:

$$\Theta(n \log n).$$

Esercizio 1 (3)

ESERCIZI DA FARE A CASA:

Risolvere con il metodo iterativo:

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n) \text{ e } T(1) = \Theta(1)$$

e

$$T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n) \text{ e } T(1) = \Theta(1)$$

Notate come cambiano i conti al variare delle costanti moltiplicative

Esercizio 1 (4)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$$T(n)=2T(n/2)+cn \text{ per qualche costante } c>0$$

$$T(1)=d \text{ per qualche costante } d>0$$

Proviamo a dimostrare per induzione su n che la soluzione è:

$$\mathbf{T(n) \geq kn \log n}, \text{ dove } k \text{ è una costante da determinare.}$$

Esercizio 1 (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Passo base. $T(1) \geq 0$, che è sempre verificata.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2(k n/2 \log n/2) + cn = kn \log n/2 + cn = \\ &= kn \log n - kn + cn \geq kn \log n \end{aligned}$$

se e solo se $cn \geq kn$ cioè se e solo se $k \leq c$. Poiché un tale k è sempre possibile da trovare, ne concludiamo che

$$T(n) = \Omega(n \log n).$$

Esercizio 1 (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Per migliorare, non possiamo usare $T(n) \leq k' n \log n$ perché il passo base non sarebbe verificato.

Tentiamo allora **$T(n) \leq k' n \log n + h$** .

Passo base. $T(1)=d \leq h$ che è vera per opportuni valori di h .

Passo induttivo. Sostituendo l'ipotesi induttiva nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 (k' n/2 \log n/2 + h) + cn = k' n \log n/2 + 2h + cn = \\ &= k' n (\log n - 1) + 2h + cn = k' n \log n + h - k' n + cn + h \leq \\ &\leq k' n \log n + h \text{ se e solo se } cn + h \leq k' n. \end{aligned}$$

Esercizio 1 (7)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Anche in questo caso esistono opportuni valori di h e k' , fissato c , per cui la disuguaglianza è verificata.

Ne segue che:

$$T(n)=O(n \log n).$$

Mettendo insieme le due notazioni asintotiche trovate, e cioè $T(n)=\Omega(n \log n)$ e $T(n)=O(n \log n)$, si deduce che

$$\mathbf{T(n)= \Theta(n \log n).}$$

Esercizio 1 (8)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 2, b = 2$
- $f(n) = \Theta(n)$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

Poiché $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ siamo nel **caso 2**, da cui:

$$T(n) = \Theta(n \log n).$$

Esercizio 1 (9)

ESERCIZI DA FARE A CASA:

Risolvere con il metodo principale:

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n) \text{ e } T(1) = \Theta(1)$$

e

$$T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n) \text{ e } T(1) = \Theta(1)$$

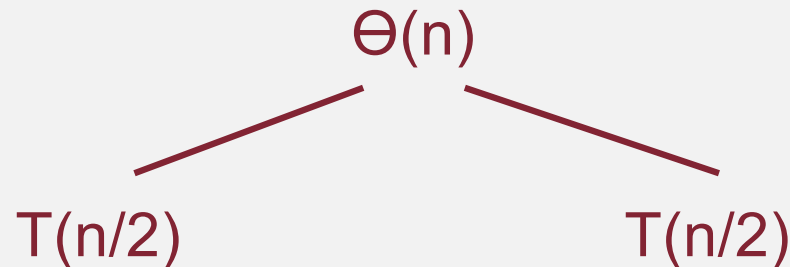
Notate come cambia il caso del teorema da applicare al variare di a e b

Esercizio 1 (10)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo dell'albero:

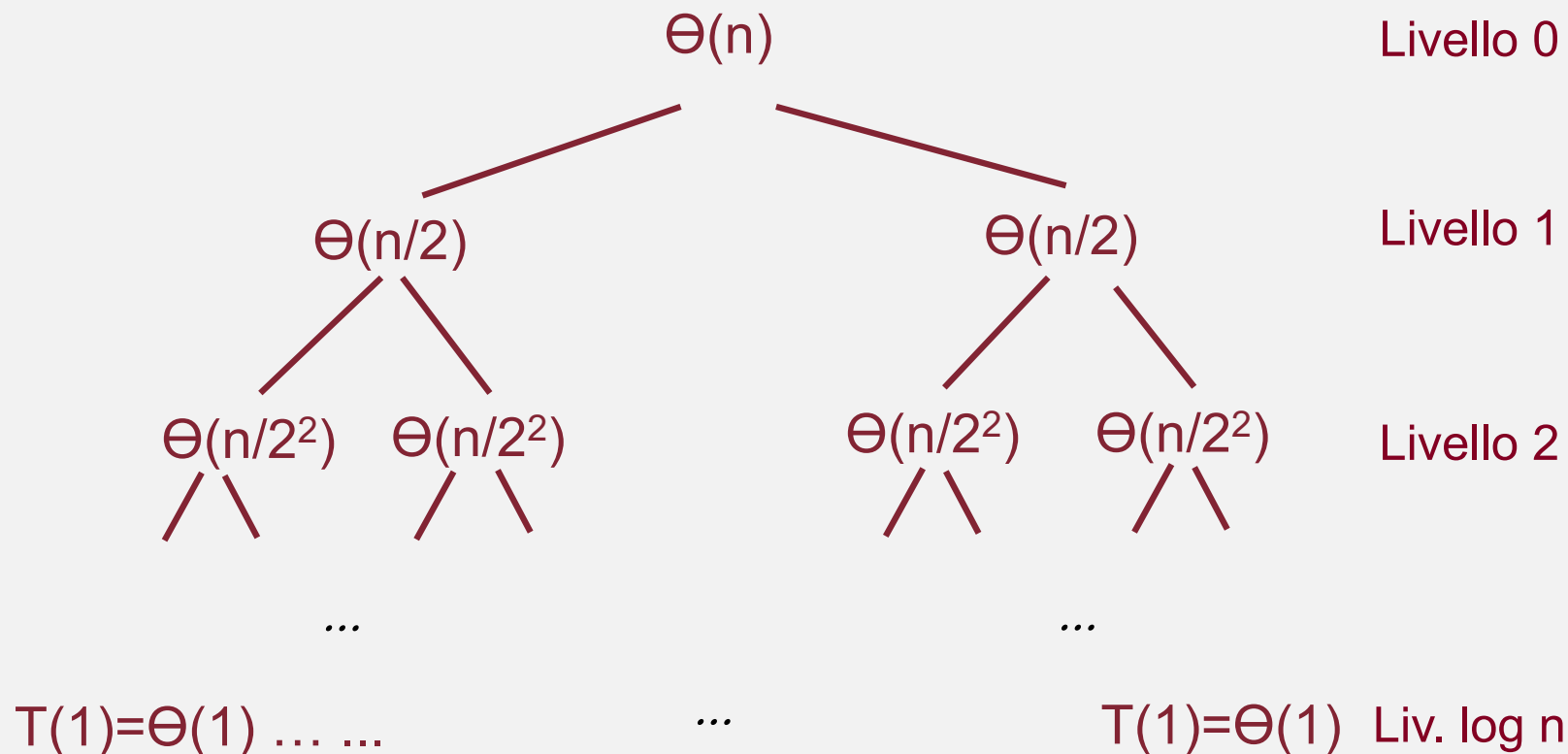
La radice dell'albero dà un contributo di $\Theta(n)$ ed ha due figli, entrambi etichettati con $T(n/2)$, che quindi danno ciascuno contributo $\Theta(n/2)$ e così via. Schematizziamo dunque l'albero in questo modo:



Esercizio 1 (11)

segue metodo dell'albero per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Iterando il procedimento otteniamo questo albero, nel quale numeriamo i livelli da zero (radice) a $\log n$:



Esercizio 1 (12)

segue metodo dell'albero per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Il contributo della generica riga i -esima dell'albero è dato dal valore su ciascuno dei suoi nodi, pari a $\Theta(n/2^i)$, moltiplicato per il numero di nodi, cioè 2^i . Considerato che le righe sono $\log n + 1$ (da 0 a $\log n$), si ha:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) 2^i = \sum_{i=0}^{\log n} \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Esercizio 2 (1)

Risolvere con tutti e 4 i metodi:

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$\begin{aligned}T(n) &= 4T(n/2) + \Theta(n) = 4(4T(n/2^2) + \Theta(n/2^1)) + \Theta(n) = \\&= 4^2T(n/2^2) + 4^1 \Theta(n/2^1) + \Theta(n) = \\&= 4^2(4T(n/2^3) + \Theta(n/2^2)) + 4^1 \Theta(n/2^1) + \Theta(n^1) = \\&= 4^3T(n/2^3) + 4^2\Theta(n/2^2) + 4^1 \Theta(n/2^1) + \Theta(n^1) = \dots = \\&= 4^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = \dots\end{aligned}$$

Esercizio 2 (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

...

$$T(n) = 4^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = 4^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta(n) = \dots$$

...(finché $n/2^k=1$ cioè se e solo se $k=\log n$)...=

$$= 4^{\log n} T(1) + \Theta(n) \sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i =$$

(ricordando che $4^{\log n} = n^2$ e che $\sum_{i=0}^{\log n - 1} 2^i = \Theta(2^{\log n}) = \Theta(n)$)

$$= n^2 \Theta(1) + \Theta(n) \Theta(n) = \Theta(n^2).$$

Dunque la soluzione tramite questo metodo è $\Theta(n^2)$.

Esercizio 2 (3)

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 4, b = 2$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$
- $f(n) = \Theta(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ (ad es. per $\varepsilon=0.5$)

Siamo quindi nel **caso 1**, da cui:

$$T(n)= \Theta(n^2).$$

Esercizio 2 (4)

- $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$
- $T(1)=\Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$$T(n)=4T(n/2)+cn \text{ per qualche costante } c>0$$

$$T(1)=d \text{ per qualche costante } d>0$$

Proviamo a dimostrare per induzione su n che la soluzione è:

$$T(n) \geq kn^2, \text{ dove } k \text{ è una costante da determinare.}$$

Esercizio 2 (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Passo base. $T(1) = d \geq k$, da cui deduciamo una prima condizione su k .

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva otteniamo:

$$T(n) \geq 4k(n/2)^2 + cn = 4kn^2/4 + cn = kn^2 + cn \geq kn^2 \text{ sempre.}$$

Ne concludiamo che

$$T(n) = \Omega(n^2).$$

Esercizio 2 (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Per quanto riguarda la maggiorazione, tentiamo la soluzione $T(n) \leq k' n^2$ dove k' è una costante da determinare.

Passo base. $T(1) = d \leq k'$, da cui deduciamo una prima condizione su k' .

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva otteniamo:

$T(n) \leq 4k' (n/2)^2 + cn = k' n^2 + cn$ che non è mai $\leq kn^2$ perché c è una costante positiva.

Esercizio 2 (7)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=4T(n/2)+\Theta(n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Tentiamo allora **$T(n) \leq k' n^2 - hn$** .

Passo base. $T(1)=d \leq k' - h$ che è vera per certi valori di k' e h .

Passo induttivo. Sostituendo l'ipotesi induttiva nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 4 (k' (n/2)^2 - hn/2) + cn = k' n^2 - 2hn + cn = \\ &= k' n^2 - hn - hn + cn \end{aligned}$$

questa quantità è $\leq k' n^2 - hn$ se e solo se $-hn + cn \leq 0$, cioè se e solo se $h \geq c$.

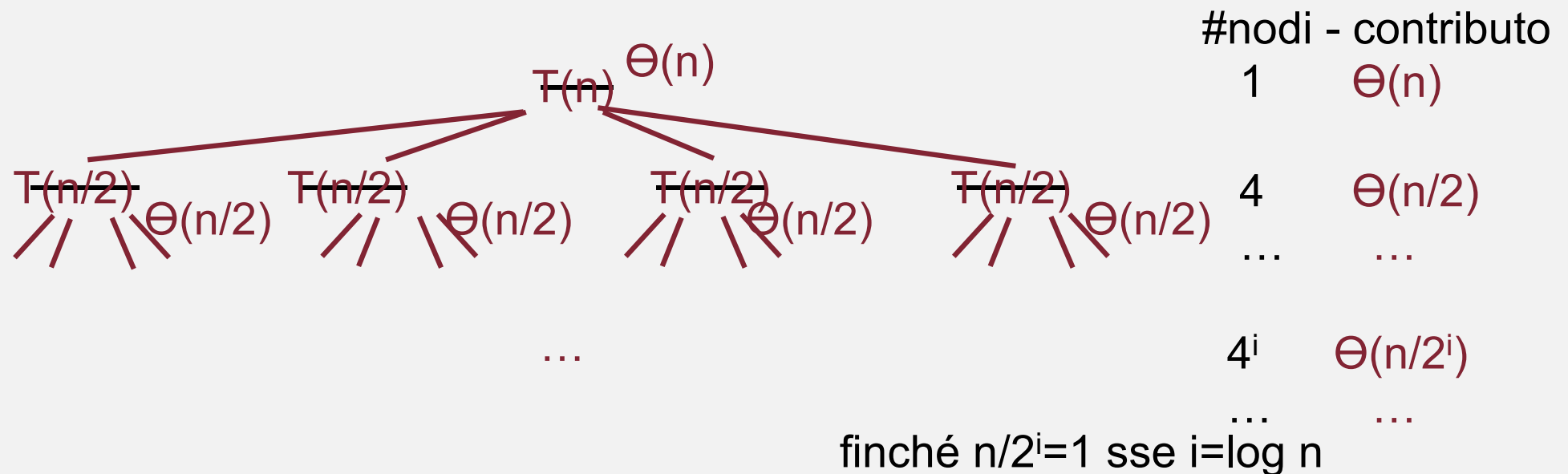
Ne concludiamo che $T(n) = O(n^2)$ e, unendo i due risultati:

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Esercizio 2 (8)

- $T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo dell'albero:



Sommo tutti i contributi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 4^i \Theta\left(\frac{n}{2^i}\right) = \Theta(n) \sum_{i=0}^{\log n} 2^i = \Theta(n) \Theta(2^{\log n}) = \Theta(n^2)$$

Esercizio 3 (1)

Risolvere con tutti e 4 i metodi:

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(n^2) = 2(2T(n/2^2) + \Theta((\frac{n}{2})^2)) + \Theta(n^2) = \\ &= 2(2(2T(n/2^3) + \Theta((\frac{n}{4})^2)) + \Theta((\frac{n}{2})^2)) + \Theta(n^2) = \dots \\ &= 2^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta\left(\left(\frac{n}{2^i}\right)^2\right) = 2^k T(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} \Theta(n^2) = \\ &= 2^k T(n/2^k) + \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \end{aligned}$$

Esercizio 3 (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)=\Theta(1)$

...

Ci fermiamo quando $n/2^k=1$ cioè $k=\log n$, ottenendo

$$T(n) = 2^{\log n} T(1) + \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Ricordando che $2^{\log n} = n$ e che $\sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \Theta(1)$

Otteniamo $T(n) = \Theta(n) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$

Dunque la soluzione tramite questo metodo è $\Theta(n^2)$.

Esercizio 3 (3)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo principale:

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 2, b = 2$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
- $f(n) = \Theta(n^2)=\Theta(n^2)= \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ (ad es. per $\varepsilon=1$)

Siamo quindi nel **caso 3**. Poiché

$$a\left(\frac{n}{b}\right)^2 = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} n^2 \leq cn^2 \text{ (ad es. per } c = 1/2) \text{ si ha}$$

$$T(n)= \Theta(n^2).$$

Esercizio 3 (4)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn^2 \text{ per qualche costante } c > 0$$

$$T(1) = d \text{ per qualche costante } d > 0$$

Proviamo a dimostrare per induzione su n la soluz.:

$$T(n) \leq kn^2, \text{ dove } k \text{ è una costante da determinare.}$$

Esercizio 3 (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Passo base. $T(1) = d \leq k$, da cui deduciamo una prima condizione su k .

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2k(n/2)^2 + cn^2 = kn^2/2 + cn^2 = \\ &= (k/2+c)n^2 \leq kn^2 \text{ se } c \leq k/2. \end{aligned}$$

Ne concludiamo che $T(n) = O(n^2)$.

Esercizio 3 (6)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$ e $T(1)=\Theta(1)$

Proviamo ora a dimostrare per induzione su n che la soluzione è $T(n) \geq hn^2$, dove h è una costante da determinare.

Passo base. $T(1) = d \geq h$, da cui deduciamo una prima condizione su h .

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva otteniamo:

$$T(n) \geq 2h(n/2)^2 + cn^2 = hn^2/2 + cn^2 = (h/2+c)n^2 \geq hn^2$$

se $(h/2+c) \geq h$, ossia $h \leq 2c$.

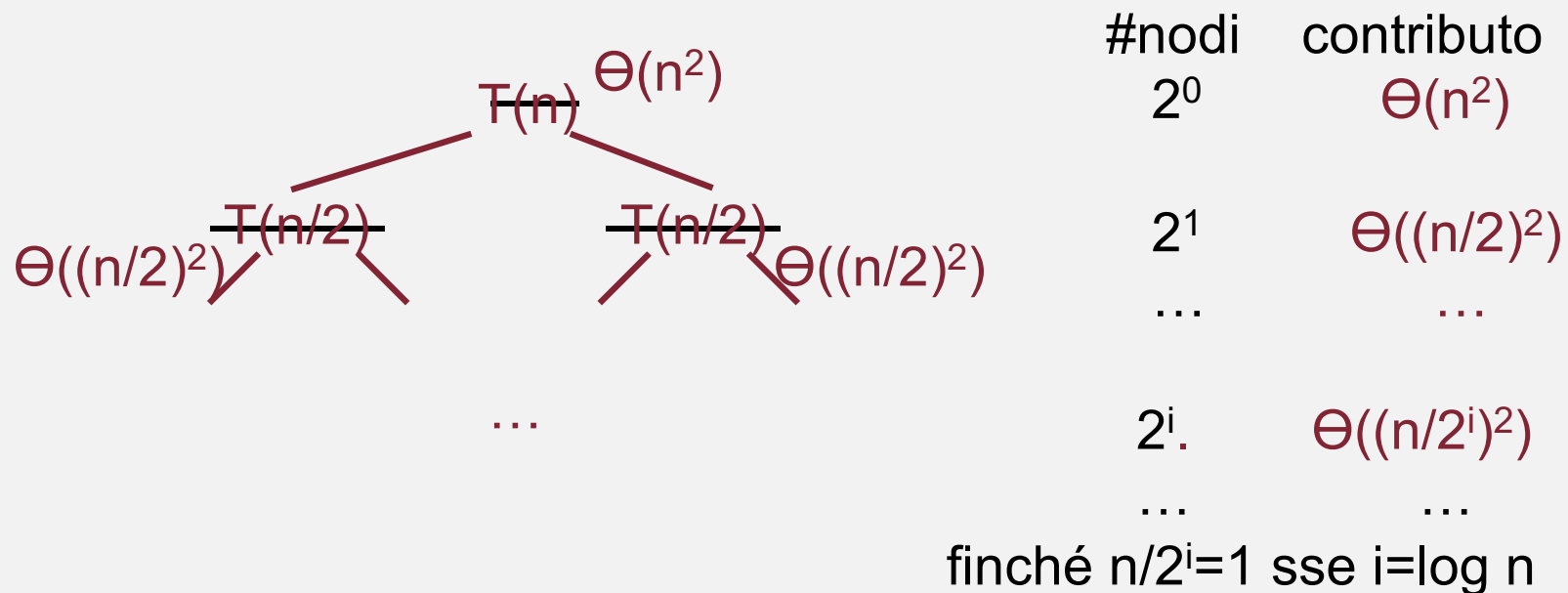
Ne concludiamo che $T(n) = \Omega(n^2)$.

Dalle due deduciamo: $T(n) = \Theta(n^2)$.

Esercizio 3 (7)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo dell'albero:



Sommo tutti i contributi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 2^i \Theta\left(\left(\frac{n}{2^i}\right)^2\right) = \Theta(n^2) \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \Theta(n^2)$$

Esercizio 4 (1)

Risolvere con tutti e 4 i metodi:

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$T(n)=2T(n/2)+ \Theta(n \log n)=2(2T(n/2^2)+\Theta(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}))+ \Theta(n \log n) =$$

$$=2^2T(\frac{n}{4}) + 2 \Theta(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}) + \Theta(n \log n) =$$

$$= 2^2(2T(\frac{n}{2^3}) + \Theta(\frac{n}{2^2} \log \frac{n}{2^2}))+2 \Theta(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}))+\Theta(n \log n) =$$

...

$$= 2^kT(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta\left(\frac{n}{2^i} \log \frac{n}{2^i}\right) = 2^kT(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta\left(n \log \frac{n}{2^i}\right)$$

Esercizio 4 (2)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

...

Ci fermiamo quando $k = \log n$ e otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{\log n} T(1) + \Theta \left(\sum_{i=0}^{\log n-1} n \log \frac{n}{2^i} \right) = \\ &= n\Theta(1) + \Theta \left(n \sum_{i=0}^{\log n-1} \log n - n \sum_{i=0}^{\log n-1} \log 2^i \right) = \\ &= \Theta(n) + \Theta \left(n \log^2 n - n \sum_{i=0}^{\log n-1} i \right) = \\ &= \Theta(n) + \Theta \left(n \log^2 n - n \frac{\log n (\log n - 1)}{2} \right) = \\ &= \Theta(n) + \Theta \left(n \log^2 n - \frac{n}{2} \log^2 n + \frac{n}{2} \log n \right) = \\ &= \Theta(n \log^2 n) \end{aligned}$$

Metodo dell'albero: FARE PER ESERCIZIO

Esercizio 4 (3)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo di sostituzione:

Impostiamo la dimensione del caso base a 2, per evitare di dover gestire il caso di $\log 1 = 0 \Rightarrow T(2) = \Theta(1)$.

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$$T(n) = 2T(n/2) + an \log n \text{ per qualche costante } a > 0$$

$$T(2) = b \text{ per qualche costante } b > 0$$

Esercizio 4 (4)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$ e $T(2)= \Theta(1)$

Proviamo a dimostrare per induzione su n la soluzione:

$T(n) \leq cn \log^2 n$, dove c è una costante da determinare.

Passo base. $T(2) = b \leq c \cdot 2 \cdot 1$, vera per $c \geq b/2$.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c \frac{n}{2} \log^2 \frac{n}{2} + an \log n = cn(\log n - 1)^2 + an \log n = \\ &= cn(\log^2 n - 2 \log n + 1) + an \log n = \\ &= cn \log^2 n - 2cn \log n + cn + an \log n \leq \\ &\leq cn \log^2 n - cn \log n + an \log n \\ &\quad \text{(perché } cn \log n \geq cn) \end{aligned}$$

Esercizio 4 (5)

segue metodo di sostituzione per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n \log n)$ e $T(2)=\Theta(1)$

...

$$cn \log^2 n - cn \log n + an \log n \leq cn \log^2 n \text{ sse } c \geq a.$$

Concludiamo che

$$T(n) = O(n \log^2 n)$$

Si lascia per esercizio dimostrare che

$$T(n) = \Omega(n \log^2 n).$$

Esercizio 4 (6)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo principale:

Abbiamo già visto che questa equazione di ricorrenza non può essere risolta con il metodo principale, poiché $f(n) = \Theta(n \log n)$ è asintoticamente più grande di $n^{\log_b a} = n$, ma non polinomialmente più grande.

Esercizio 5 (1)

- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n/\log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Metodo principale:

La ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

$a = 2, b = 2$, da cui $\log_a b = 1$

$f(n) = \Theta(n/\log n)$

$n^{\log_b a} = n$ è asintoticamente più grande di $f(n)$, ma non polinomialmente. Di conseguenza **non** possiamo applicare il metodo del teorema principale.

Esercizio 5 (2)

- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$
- $T(1)= \Theta(1)$

Metodo iterativo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + \Theta(n/\log n) = \\ &= 2(2T(n/2^2) + \Theta(\frac{n}{2}/\log \frac{n}{2})) + \Theta(n/\log n) = \\ &= 2^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2 \Theta(\frac{n}{2}/\log \frac{n}{2}) + \Theta(n/\log n) = \\ &= 2^2(2T(\frac{n}{2^3}) + \Theta(\frac{n}{2^2}/\log \frac{n}{2^2})) + 2 \Theta(\frac{n}{2}/\log \frac{n}{2}) + \Theta(n/\log n) = \\ &\quad \dots \\ &= 2^k T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta(\frac{n}{2^i}/\log \frac{n}{2^i}) = 2^k T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta(n/\log \frac{n}{2^i}) \end{aligned}$$

Esercizio 5 (3)

segue metodo iterativo per $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n/\log n)$ e $T(1)=\Theta(1)$

...

Ci fermiamo quando $k = \log n$ e otteniamo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{\log n} T(1) + \theta \left(\sum_{i=0}^{\log n - 1} n / \log \frac{n}{2^i} \right) = \\ &= n\Theta(1) + \theta \left(n \sum_{i=0}^{\log n - 1} 1 / (\log n - i) \right) = \\ &= n\Theta(1) + \theta \left(n \sum_{j=1}^{\log n} 1/j \right) = \\ &\quad \text{(usiamo } \sum_{j=1}^a 1/j = \Theta(\log a) \text{)} \\ &= \Theta(n) + \Theta(n) \Theta(\log \log n) = \Theta(n \log \log n) \end{aligned}$$

RISOLVERE PER ESERCIZIO CON GLI ALTRI METODI

Corso di laurea in Informatica
Algoritmi 1
A.A. 2025/26

Esercizi per casa



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Esercizi (1)

Fare tutti gli esercizi lasciati a casa durante questa lezione, cioè:

- Risolvere con il metodo iterativo e con il metodo principale:
 $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n)$; $T(1) = \Theta(1)$
e $T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$; $T(1) = \Theta(1)$
- Data l'equazione:
 $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$; $T(1) = \Theta(1)$
dimostrare per induzione che $T(n) = \Omega(n \log^2 n)$.
- Risolvere l'equazione:
 $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n/\log n)$; $T(1) = \Theta(1)$
con il metodo di sostituzione e dell'albero.

Esercizi (2)

- Calcolare l'equazione di ricorrenza associata al seguente algoritmo e risolverla con tutti i metodi possibili:

```
def Test (n)
    k = 0
    for i in range(1, n):
        k = k + 1
    if n ≤ 1: return k
    else: return (Test(n DIV 2)+Test(n DIV 4))
```