ESERCIZIO 2 28/01/2008

Passo 1 : $\Theta\left(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right) = \Theta(n\log n)$

" 2 : $\Theta(1)$

" 3 : $\Theta(n)$

$$\frac{n}{4} \leq \#\text{elem. minori del perno } m \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{2} = \frac{3n}{4}$$

$$\frac{n}{4} \leq \#\text{elem. maggiori del perno } m \leq \frac{3n}{4}$$

(a) Array ordinato in modo decrescente

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_{n-1} \geq x_n$$

$$m = x_{\frac{3n}{4}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{4} \text{ elementi sono} > m \\ \frac{3n}{4} \text{ elem. sono} < m \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n\log n) + \underbrace{\Theta\left(\frac{3n}{4}\log\frac{3n}{4}\right)}_{\text{Passo 4}} +$$

$$+ T\left(\frac{n}{4}\right) = T\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta(n\log n)$$

$f(n) = n\log n$

$a = 1 \quad b = 4 \qquad n^{\log_b a} = n^{\log_4 1} = \Theta(1)$

- $n\log n = f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right) = \Omega(n^{\varepsilon})$ OK per $\varepsilon = 1$
- $a f\left(\frac{n}{b}\right) \overset{?}{\leq} c f(n) \qquad f\left(\frac{n}{4}\right) \overset{?}{\leq} c f(n)$ per $c < 1$

$\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \leq c\, n\log n \qquad$ OK per $c = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Caso 3 Th. Master : $T(n) = \Theta(f(n)) =$

$= \Theta(n\log n)$

(b) Array ordinato in modo crescente

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ \dots \ \leq x_{n-1} \leq x_n$$

$$m = x_{\frac{n}{4}} \Rightarrow \begin{cases} \# \text{elem.} < m = \dfrac{n}{4} \\ \# \text{elem.} > m = \dfrac{3n}{4} \end{cases}$$

$$T(n) = \Theta(n \log n) + \Theta\left(\frac{n}{4} \log \frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) =$$
$$= T\left(\frac{3n}{4}\right) + \Theta(n \log n)$$

$a = 1$, $b = \dfrac{4}{3}$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{4/3} 1} = n^0 = \Theta(1)$$

- $n \log n = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ per $\varepsilon = 1$
- $a f\left(\dfrac{n}{b}\right) = \dfrac{3n}{4} \log \dfrac{3n}{4} \leq c f(n) = c\, n \log n$

ok per $c = \dfrac{3}{4}$

Caso 3 Th. Master: $T(n) = \Theta(n \log n)$

(c) Anche in tutti i casi "intermedi" il tempo di esecuzione è $\Theta(n \log n)$

Infatti i passi 1-4 richiedono tempo $\Theta(n \log n)$.
Il passo 5 è una chiamata ric. su $\dfrac{n}{b}$ elementi con $\dfrac{n}{b} \leq \dfrac{3n}{4}$

Quindi il caso (b) è il caso peggiore

(d) Variazioni su tema:

mettere chiamate ricorsive anche nei passi 1 e/o 4

Impostare le equazioni di ricorrenza (senza risolverle)

(d.1) Solo passo 1:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) + \Theta(n) + \Theta(n \log n) + T(x)$$

$$\frac{n}{4} \leq x \leq \frac{3n}{4}$$

(d.2) Solo passo 4:

$$T(n) = \Theta(n \log n) + \Theta(1) + \Theta(n) + T(a) + T(b)$$ con:

- $\frac{n}{4} \leq a \leq \frac{3n}{4}$
- $\frac{n}{4} \leq b \leq \frac{3n}{4}$
- $a + b = n$

(d.3) Entrambi i passi 1 e 4 ricorsivi:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) + \Theta(n) + T(a) + T(b)$$

con i vincoli visti sopra

(e) Facendo chiamate ricorsive sia al passo 1 che al passo 4, l'algoritmo diventa più efficiente nel w.c. ?

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T(a) + T(b) + \Theta(n)$$

potrebbe accadere che $a = \frac{n}{2}$ e $b = \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow T(n) \geq 3\,T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 3}$$

$$1 < \log_2 3 < 2$$

$$f(n) = n = O\left(n^{\log_2 3 - \varepsilon}\right)$$

OK se $\log_2 3 - \varepsilon \geq 1$

ovvero

$$\varepsilon \leq \underbrace{\log_2 3 - 1}_{>0}$$

Caso 1 Th. Master:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) \left[= \Omega(n \log n) \right]$$

$\Rightarrow$ l'algoritmo è più inefficiente