

Come risolvere equazioni di ricorrenza (Parte 2)

Algoritmi 1 – Lezione 5

A. Monti
Sapienza Università di Roma

Corso: Algoritmi 1

1 Introduzione

2 Metodo di sostituzione

- Esempio 1
- Esempio 2

3 Teorema Principale

- Enunciato
- Esempi
- Limiti

Metodi di risoluzione

Le equazioni di ricorrenza sono uno strumento matematico fondamentale per analizzare il comportamento di algoritmi ricorsivi. Esse consentono di esprimere il tempo di esecuzione in funzione della dimensione del problema. Risolvere un'equazione di ricorrenza significa trovare una soluzione esplicita che descriva il comportamento asintotico della ricorrenza.

In questo corso, esploreremo quattro metodi principali per risolvere equazioni di ricorrenza:

- **Metodo iterativo:** consiste nell'espandere iterativamente la ricorrenza fino a identificare un pattern generale e ottenere la soluzione.
- **Metodo dell'albero:** si basa sulla rappresentazione della ricorrenza tramite un albero di calcolo, utile per visualizzare la struttura del problema e determinare il costo complessivo.
- **Metodo di sostituzione:** prevede di proporre una soluzione ipotetica e verificarne la validità tramite sostituzione nella ricorrenza.
- **Teorema principale:** offre un approccio sistematico per risolvere molte ricorrenze comuni, basandosi su una classificazione del termine di ricorrenza.

In questa lezione illustreremo gli ultimi due metodi.

Il metodo di sostituzione

Questo metodo è particolarmente utile per:

- dimostrare che una data soluzione è corretta.

Procedura tipica:

- 1 Formulare un'ipotesi basata sull'osservazione della ricorrenza.
- 2 Sostituire l'ipotesi nella ricorrenza per verificare che sia soddisfatta.
- 3 Determinare eventuali costanti o parametri nella soluzione.

Consideriamo la seguente ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) = \Theta(n^2)$.

Useremo il metodo della sostituzione in due passaggi:

1. Mostriamo che $T(n) = O(n^2)$
2. Mostriamo che $T(n) \in \Omega(n^2)$

Esempio 1: Dimostrazione che $T(n) = O(n^2)$

Eliminiamo l'asintotica dalla ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + an & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) \leq cn^2$ per una costante $c > 0$ e per ogni $n \geq 1$.

Caso base: Prendendo $c \geq b$, per $n = 1$, abbiamo $T(1) = b \leq c$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $T(k) \leq ck^2$ valga per ogni $k < n$.

Passo induttivo:

$$T(n) = T(n-1) + an \leq c(n-1)^2 + an = cn^2 - 2cn + c + an \leq cn^2 - cn + an \leq cn^2$$

dove l'ultima disuguaglianza segue scegliendo $c \geq a$.

Basta quindi scegliere $c = \max\{a, b\}$ e l'ipotesi è verificata.

Esempio 1: Dimostrazione che $T(n) = \Omega(n^2)$

Eliminiamo l'asintotica dalla ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + an & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) \geq cn^2$ per una costante $c > 0$ e per ogni $n \geq 1$.

Caso base: Prendendo $c \leq b$, per $n = 1$, abbiamo $T(1) = b \geq c$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $T(k) \geq ck^2$ valga per ogni $k < n$.

Passo induttivo:

$$T(n) = T(n-1) + an \geq c(n-1)^2 + an = cn^2 + c - 2cn + an > cn^2$$

dove l'ultima disequaglianza segue scegliendo $c \leq a/2$.

Basta quindi scegliere $c = \min\{a/2, b\}$ e l'ipotesi è verificata.

Metodo della sostituzione — Esempio 2

Consideriamo la seguente ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) = \Theta(n)$.

Useremo il metodo della sostituzione in due passaggi:

1. Mostriamo che $T(n) = O(n)$
2. Mostriamo che $T(n) \in \Omega(n)$

Esempio 2: Dimostrazione che $T(n) = O(n)$

Eliminiamo l'asintotica dalla ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) \leq cn - d$ per due costanti $c, d > 0$ e per ogni $n \geq 1$.

Caso base: Prendendo $c - d \geq b$, per $n = 1$, abbiamo $T(1) \leq b \leq c \cdot 1 - d$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che cioè $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\frac{n}{2} - d$ otteniamo

Passo induttivo:

$$T(n) \leq 2\left(c\frac{n}{2} - d\right) + a = cn - 2d + a = cn - d - (d - a) \leq cn - d$$

dove l'ultima disuguaglianza segue scegliendo $d \geq a$.

Basta quindi prendere $d \geq a$ e $c - d \geq b$ (come ad esempio $d = \max\{a, b\}$ e $c = 2d$) e l'ipotesi è verificata.

Esempio 2: Dimostrazione che $T(n) = \Omega(n)$

Eliminiamo l'asintotica dalla ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Obiettivo: Dimostrare che $T(n) \geq cn - d$ per due costanti $c, d > 0$ e per ogni $n \geq 1$.

Caso base: Prendendo $c - d \leq b$, per $n = 1$, abbiamo $T(1) \geq b \geq c \cdot 1 - d$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che cioè $T\left(\frac{n}{2}\right) \geq c\frac{n}{2} - d$ otteniamo

Passo induttivo:

$$T(n) \geq 2\left(c\frac{n}{2} - d\right) + a = cn - 2d + a = cn - d + (a - d) \geq cn - d$$

dove l'ultima disequaglianza segue scegliendo $d \leq a$.

Quindi, prendendo $d \leq a$ e $c - d \leq b$ (come ad esempio $d = \min\{a, b\}$ e $c = 2d$), l'ipotesi è verificata.

Teorema principale delle ricorrenze

Il teorema principale fornisce un metodo per determinare la complessità asintotica di equazioni ricorsive del tipo:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

dove:

- $a \geq 1$: numero di sottoproblemi
- $b > 1$: fattore di divisione
- $f(n)$: costo della divisione/combinazione

Il comportamento asintotico di $T(n)$ dipende dal confronto tra $f(n)$ e $n^{\log_b a}$:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0 \rightarrow$ **caso 1**
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow$ **caso 2**
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ e soddisfa una **condizione di regolarità** vale a dire:
 $\exists c < 1$ tale che $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ per n sufficientemente grande
 $\rightarrow$ **caso 3**

Teorema principale — esempi di applicazione

Caso 1: $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1) \rightarrow \log_2 2 = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

Caso 2: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Esempio: $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

Caso 3: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ e $af(n/b) \leq cf(n)$ per $c < 1$

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

Esempio: $T(n) = T(n/2) + \Theta(n^2) \rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

Limiti del Teorema Principale

Il Teorema Principale è uno strumento potente, ma i suoi **tre casi non sono esaustivi**:

- Esistono funzioni $f(n)$ **dominate** da $n^{\log_b a}$ ma **non fortemente dominate**.
- Esistono funzioni $f(n)$ **dominanti** su $n^{\log_b a}$, ma **non fortemente dominanti**.

In questi casi il teorema **non è applicabile** e occorre usare metodi alternativi (iterazione, sostituzione).

Esempio 1: Caso 1 non applicabile

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$$

- $a = 2, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n$
- $f(n) = \frac{n}{\log n} \in O(n)$, ma $\notin O(n^{1-\epsilon})$ per nessun $\epsilon > 0$

Conclusione: $f(n)$ è dominata, ma non fortemente.

Esempio 2: Caso 3 non applicabile

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

- $a = 2, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n$
- $f(n) = n \log n \in \Omega(n)$, ma $\notin \Omega(n^{1+\epsilon})$ per nessun $\epsilon > 0$

Conclusione: $f(n)$ è dominante, ma non fortemente.

ESERCIZI

Suggerimento: Prima di cercare le soluzioni in rete, prova a ragionarci da solo: gli esercizi che seguono sono pensati per aiutarti a mettere alla prova la tua comprensione, la tua capacità di sviluppare una prova di correttezza e costruire un algoritmo corretto.

Solo dopo averci riflettuto, confronta la tua soluzione con altre possibili versioni.



Calcolare la soluzione delle seguenti equazioni di ricorrenza applicando il teorema principale, se questo non è possibile spiegare perché e risolvere l'equazione col metodo di sostituzione:

- | | | | |
|-----|--|--------------------|---|
| 1. | $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$ |
| 2. | $T(n) = T(n-1) + \Theta(2^n),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(2^n)$ |
| 3. | $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n^2)$ |
| 4. | $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^3),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n^3)$ |
| 5. | $T(n) = 16T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n^4)$ |
| 6. | $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(n),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(2^n)$ |
| 8. | $T(n) = 9T(n-3) + \Theta(2^n)$ | $T(0) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(9^{\frac{n}{3}})$ |
| 11. | $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n^2)$ |
| 12. | $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n \log \log n)$ |
| 13. | $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n),$ | $T(1) = \Theta(1)$ | soluzione: $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$ |