

Come risolvere equazioni di ricorrenza (Parte 1)

Algoritmi 1 – Lezione 4

A. Monti
Sapienza Università di Roma

Corso: Algoritmi 1

1 Introduzione alle Equazioni di Ricorrenza

- Metodo Iterativo
- Metodo dell'Albero

Metodi di risoluzione

Le equazioni di ricorrenza sono uno strumento fondamentale per analizzare il comportamento di algoritmi ricorsivi, esprimendo il tempo di esecuzione in funzione della dimensione del problema. Risolverle significa trovare una soluzione esplicita che ne descriva il comportamento asintotico.

In questa lezione introdurremo quattro metodi principali per risolvere le equazioni di ricorrenza:

- **Metodo iterativo:** consiste nell'espandere iterativamente la ricorrenza fino a identificare un pattern generale e ottenere la soluzione.
- **Metodo dell'albero:** si basa sulla rappresentazione della ricorrenza tramite un albero di calcolo, utile per visualizzare la struttura del problema e determinare il costo complessivo.
- **Metodo di sostituzione:** prevede di proporre una soluzione ipotetica e verificarne la validità tramite sostituzione nella ricorrenza.
- **Teorema principale:** offre un approccio sistematico per risolvere molte ricorrenze comuni, basandosi su una classificazione del termine di ricorrenza.

In questa lezione illustreremo i primi due metodi.

Il metodo iterativo consiste nell'espandere la ricorrenza passo dopo passo, sostituendo il termine ricorsivo fino a identificare un modello generale che consenta di sommare i termini ottenuti. È particolarmente utile per ottenere una soluzione esplicita senza ipotesi preliminari.

La procedura tipica si articola nei seguenti passi:

- 1 Espandere la ricorrenza sostituendo il termine ricorsivo con la sua definizione.
- 2 Identificare un pattern generale dopo un numero sufficiente di sostituzioni.
- 3 Esplicitare la somma risultante e semplificare il risultato.
- 4 Calcolare il valore finale utilizzando le condizioni iniziali.

Metodo Iterativo — Esempio 1

Consideriamo la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Espandiamo la ricorrenza passo dopo passo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + \Theta(1) \\ &= T(n-2) + 2\Theta(1) \\ &= T(n-3) + 3\Theta(1) \\ &\vdots \\ &= T(n-k) + k\Theta(1) \end{aligned}$$

Per $k = n - 1$, si raggiunge il caso base $T(1) = \Theta(1)$, quindi:

$$T(n) = T(1) + (n-1)\Theta(1) = \Theta(1) + \Theta(n) = \Theta(n)$$

Metodo Iterativo — Esempio 2 (Espansione)

Consideriamo la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Espandiamo la ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) \\ &= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \Theta(1)\right] + \Theta(1) \\ &= 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\Theta(1) + \Theta(1) \\ &= 2^2 \left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \Theta(1)\right] + 2\Theta(1) + \Theta(1) \\ &= 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2\Theta(1) + 2\Theta(1) + \Theta(1) \\ &= \dots \\ &= 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot \Theta(1) \end{aligned}$$

Metodo Iterativo — Esempio 2 (Analisi e Conclusione)

Continuiamo:

- La ricorsione termina quando $\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow k = \log_2 n$
- Si ha quindi:

$$T(n) = 2^{\log_2 n} \cdot \Theta(1) + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i \cdot \Theta(1)$$

Analisi dei singoli termini:

- $2^{\log_2 n} = n \Rightarrow \Theta(n)$
- La somma geometrica: $\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i = 2^{\log_2 n} - 1 = n - 1 \Rightarrow \Theta(n)$

Conclusione: $T(n) = \Theta(n) + \Theta(n) = \Theta(n)$.

Il Metodo dell'Albero

Il metodo dell'albero è una tecnica grafica e intuitiva per analizzare le ricorrenze, utile per visualizzare la distribuzione dei costi nei diversi livelli della ricorsione.

È particolarmente indicato per ricorrenze della forma:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

dove $a > 1$, $b > 1$, e $f(n)$ rappresenta il contributo non ricorsivo.

Costruzione dell'Albero Ricorsivo

- 1 Espandiamo la ricorrenza iterativamente, suddividendo $T(n)$ nei suoi sottoproblemi fino a raggiungere la dimensione di base.
- 2 Calcoliamo il costo di ciascun livello dell'albero.
- 3 Calcoliamo il numero totale di livelli e il costo complessivo sommando i costi di tutti i livelli.

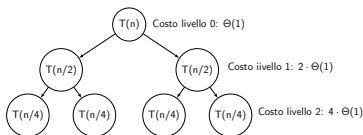
Metodo dell'Albero — Esempio 1

Data la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Costruzione dell'albero:

- Al livello k , ci sono 2^k sottoproblemi di dimensione $\frac{n}{2^k}$, ognuno con costo $\Theta(1)$, quindi costo totale $2^k \cdot \Theta(1)$.



Calcolo del numero di livelli: L' albero si espande finché $\frac{n}{2^k} = 1$, ovvero:
 $k = \log_2 n$.

Conclusione: la ricorrenza ha complessità $T(n) = \sum_{k=0}^{\log_2 n} 2^k \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$.

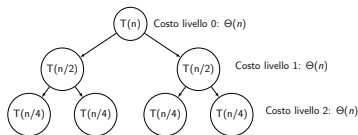
Metodo dell'Albero — Esempio 2

Data la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Costruzione dell'albero:

- Al livello k , ci sono 2^k sottoproblemi di dimensione $\frac{n}{2^k}$, ciascuno con costo $\Theta\left(\frac{n}{2^k}\right)$, per un costo totale:
 $2^k \cdot \Theta\left(\frac{n}{2^k}\right) = \Theta(n)$.



Calcolo del numero di livelli: la ricorsione termina quando $\frac{n}{2^k} = 1$, cioè: $k = \log_2 n$.

Conclusione: la ricorrenza ha complessità: $T(n) = \sum_{k=0}^{\log_2 n} \Theta(n) = \Theta(n \log n)$.

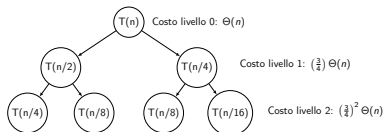
Metodo dell'Albero — Esempio 3

Data la ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Costruzione dell'albero:

- Al livello 0 (radice), il costo è $f(n) = \Theta(n)$.
- Al livello 1, ci sono due nodi: uno di dimensione $\frac{n}{2}$ con costo $\Theta\left(\frac{n}{2}\right)$, e uno di dimensione $\frac{n}{4}$ con costo $\Theta\left(\frac{n}{4}\right)$. Costo totale: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \Theta(n) = \frac{3}{4} \cdot \Theta(n)$.
- Al livello 2, ogni nodo genera due figli: il nodo di dimensione $\frac{n}{2}$ produce $\frac{n}{4}$ e $\frac{n}{8}$, mentre il nodo di dimensione $\frac{n}{4}$ produce $\frac{n}{8}$ e $\frac{n}{16}$. Costo totale: $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \Theta(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \Theta(n)$.
- ...
- Al livello generico k , il costo totale è $\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \Theta(n)$.



- Altezza dell'albero: la catena più lunga passa sempre dal sottoproblema più grande $n/2$, quindi

$$\frac{n}{2^k} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \leq \log_2 n.$$

- Sommatoria dei livelli: $T(n) \leq \sum_{i=0}^{\log_2 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot \Theta(n) = O(n)$.

- Lower bound: anche considerando solo il primo livello, il costo è $\Theta(n)$, quindi $T(n) = \Omega(n)$.

- Conclusione: combinando upper e lower bound, si ottiene $T(n) = \Theta(n)$.

ESERCIZI

Suggerimento: Prima di cercare le soluzioni in rete, prova a ragionarci da solo: gli esercizi che seguono sono pensati per aiutarti a mettere alla prova la tua comprensione, la tua capacità di sviluppare una prova di correttezza e costruire un algoritmo corretto.

Solo dopo averci riflettuto, confronta la tua soluzione con altre possibili versioni.



Calcolare la soluzione delle seguenti equazioni di ricorrenza applicando uno dei metodi visti in questa lezione:

1. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$
2. $T(n) = T(n-1) + \Theta(2^n)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(2^n)$
3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n^2)$
4. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^3)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n^3)$
5. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n^4)$
6. $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(n)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(2^n)$
8. $T(n) = 9T(n-3) + \Theta(2^n)$, $T(0) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(9^{\frac{n}{3}})$
11. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n^2)$
12. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n \log \log n)$
13. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n)$, $T(1) = \Theta(1)$ soluzione: $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$