

Notazione Asintotica

Algoritmi 1 – Lezione 1

A. Monti
Sapienza Università di Roma

Corso: Algoritmi 1

- 1 L'importanza dell'analisi asintotica
 - Confronto tra algoritmi
- 2 L'asintotica delle funzioni
 - Tassi di crescita delle funzioni
- 3 Definizioni delle notazioni asintotiche
 - Notazione O
 - Notazione Ω
 - Notazione Θ
- 4 Algebra dell'asintotica
- 5 Metodi per determinare l'asintotica di una somma
 - Metodo della forma chiusa
 - Metodo dei limiti asintotici
 - Metodo dell'integrale

Motivazione intuitiva

Per introdurre il concetto di **asintotica delle funzioni**, iniziamo con una discussione motivazionale, per poi passare alla trattazione formale dell'argomento.

Immaginiamo di dover scegliere tra due algoritmi per cercare un elemento in una lista di n elementi:

- Il primo algoritmo richiede circa n passi.
- Il secondo circa $\log_2 n$ passi.

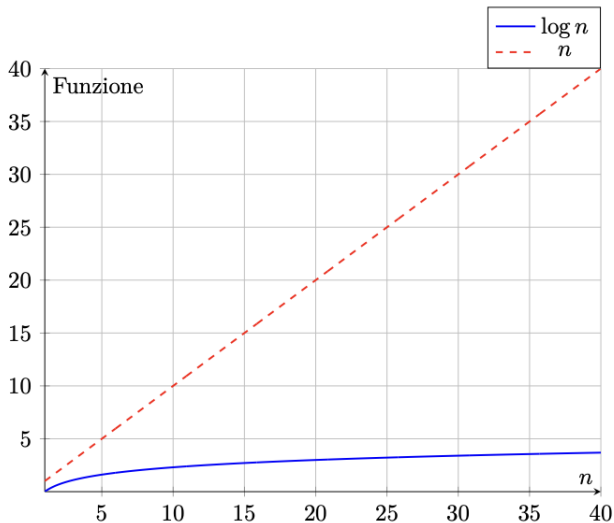
Ad esempio, con $n = 10^9$:

- Il primo richiede circa 10^9 passi.
- Il secondo solo $\log_2(10^9) \approx 30$ passi.

Conclusione: il secondo algoritmo è enormemente più efficiente per valori grandi di n .

Confronto grafico

Visualizzazione del divario tra n e $\log_2 n$



Riassumendo: perché l'asintotica è importante

L'analisi asintotica è fondamentale per:

- 1 **Stimare le prestazioni.**
- 2 **Confrontare le soluzioni.**
- 3 **Valutare la scalabilità nel lungo termine.**

Conclusione: l'analisi asintotica non serve solo per ottimizzare il codice oggi, ma per progettare soluzioni robuste per dati grandi domani.

In questa sezione richiameremo:

- Le definizioni formali delle notazioni asintotiche (O , Ω , Θ).
- Le loro proprietà matematiche.

Queste nozioni ci aiuteranno poi a valutare in modo rigoroso le prestazioni degli algoritmi e a confrontare in modo oggettivo diverse soluzioni.

Tassi di crescita a confronto

Per analizzare gli algoritmi, è importante confrontare il tasso di crescita delle funzioni che esprimono la loro complessità.

- $\log n$: crescita lenta (linea continua, blu).
- n : crescita lineare (linea tratteggiata, rossa).
- $n \log n$: crescita intermedia (linea puntinata, verde).
- n^2 : crescita quadratica (linea tratto-punto, arancione).

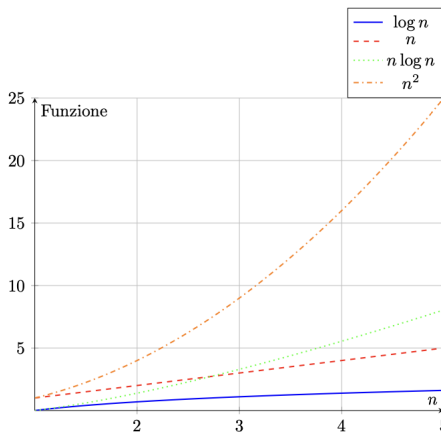


Tabella comparativa dei tassi di crescita

Per evidenziare come variano i tassi di crescita al crescere di n , confrontiamo i valori di alcune funzioni comunemente usate in analisi degli algoritmi:

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2
10	≈ 3.3	10	≈ 33	100
10,000	≈ 13.3	10,000	$\approx 132,877$	100,000,000

Osservazione: all'aumentare di n , la distanza tra le funzioni cresce in modo significativo. Le funzioni con crescita quadratica o superiore diventano rapidamente impraticabili.

Notazione $O(g(n))$ Limite superiore

La notazione O descrive un **limite superiore asintotico** per $f(n)$.

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Metodo del limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L \quad \text{con } L < \infty$$

Esempio: $\log_2 n \in O(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 n \in O(n)$$

In generale: $\log_2^c n \in O(n) \quad \forall c \geq 1$

Notazione $\Omega(g(n))$ Limite inferiore

La notazione Ω descrive un **limite inferiore asintotico** per $f(n)$.

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists c > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Metodo del limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L \quad \text{con } L > 0 \text{ o } +\infty$$

Esempio: $n \in \Omega(\sqrt{n} \log n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n} \log_2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log_2 n} = +\infty \Rightarrow n \in \Omega(\sqrt{n} \log n)$$

In generale: $n \in \Omega(\sqrt{n} \log^c n) \quad \forall c \geq 1$

Notazione $\Theta(g(n))$ Stima precisa

La notazione Θ indica una **crescita asintoticamente equivalente**.

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Metodo del limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L \quad \text{con } L > 0 \text{ finito}$$

Esempio: $5n + \ln n \in \Theta(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + \ln n}{n} = 5 \Rightarrow 5n + \ln n \in \Theta(n)$$

In generale: $c_1 n + \ln^{c_2} n \in \Theta(n) \quad \forall c_1 > 0, c_2 \geq 1$

Confronto tra le tre notazioni

Riassunto delle definizioni:

- $f(n) \in O(g(n))$: crescita **al più** come $g(n)$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$: crescita **almeno** come $g(n)$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$: crescita **esattamente** come $g(n)$

Metodo del limite del rapporto

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$	Conclusione
0	$f(n) \in O(g(n))$ ma $f(n) \neq \Theta(g(n))$
Costante > 0	$f(n) \in \Theta(g(n))$
∞	$f(n) \in \Omega(g(n))$ ma $f(n) \neq \Theta(g(n))$

Nota: è comune scrivere $f(n) = O(g(n))$, anche se formalmente si intende $f(n) \in O(g(n))$.

Esercizio 1: Polinomio asintoticamente positivo (1/2)

Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^d c_i n^i$ un polinomio di grado d con $c_d > 0$. Mostrare che:

$$P_d(n) \in \Theta(n^d)$$

Usiamo il **metodo del limite del rapporto**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_d(n)}{n^d} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=0}^d c_i n^i}{n^d}$$

Separiamo i termini della somma:

$$\frac{\sum_{i=0}^d c_i n^i}{n^d} = \sum_{i=0}^d c_i \frac{n^i}{n^d} = \sum_{i=0}^d c_i n^{i-d}$$

Esercizio 1: Polinomio asintoticamente positivo (2/2)

Analizziamo il comportamento dei termini della somma:

- Se $i = d$, allora $n^{i-d} = n^0 = 1$
- Se $i < d$, allora $n^{i-d} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^d c_i n^{i-d} = c_d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i \cdot 0 = c_d$$

Poiché $c_d > 0$, il limite è **positivo e finito**. Allora:

$$P_d(n) \in \Theta(n^d)$$

Conclusione: Un polinomio asintoticamente positivo di grado d ha crescita asintotica $\Theta(n^d)$.

Esercizio: La base del logaritmo è irrilevante

Dimostrare che $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ per ogni $a, b > 1$.

Usiamo il **metodo del limite del rapporto** e la **formula del cambio di base**:

$$\log_a n = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n}{\log_b n} = \frac{1}{\log_b a} > 0$$

Conclusione: il limite è finito e positivo $\Rightarrow \log_a n \in \Theta(\log_b n)$.

Per questo motivo, nella notazione asintotica si omette spesso la base, e si scrive:

$$\Theta(\log n) \quad \text{anziché} \quad \Theta(\log_a n)$$

Algebra dell'asintotica: cos'è e perché è utile

L'algebra dell'asintotica è l'insieme di regole che permette di manipolare e semplificare espressioni nella notazione asintotica (O , Θ , Ω).

Perché è utile?

- Permette di semplificare la complessità di algoritmi composti.
- Consente di trascurare costanti e termini non dominanti.
- Rende più facile confrontare algoritmi in modo rigoroso.

Esempio: Se $f(n) = 3n^2 + 5n \log n + 7$, allora:

$$f(n) \in \Theta(n^2)$$

perché n^2 domina tutti gli altri termini.

1. Somma di funzioni

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, $h(n) \in O(g(n))$, allora:

$$f(n) + h(n) \in \Theta(g(n))$$

2. Costanti moltiplicative

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $c > 0$, allora:

$$c \cdot f(n) \in \Theta(g(n))$$

3. Prodotto di funzioni

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, $h(n) \in \Theta(k(n))$, allora:

$$f(n) \cdot h(n) \in \Theta(g(n) \cdot k(n))$$

4. Transitività

Se $f(n) \in \Theta(g(n))$, $g(n) \in \Theta(h(n))$, allora:

$$f(n) \in \Theta(h(n))$$

Esempio 1:

$$f(n) = 2n^3 + 4n + \log n \quad \Rightarrow \quad f(n) \in \Theta(n^3)$$

Esempio 2:

$$g(n) = n \cdot \log n + 5 \log n \quad \Rightarrow \quad g(n) \in \Theta(n \log n)$$

Esempio 3:

$$T(n) = 10 \cdot \log_2 n \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Theta(\log n)$$

Conclusione: L'algebra dell'asintotica aiuta a identificare rapidamente il termine dominante e a semplificare l'analisi.

Introduzione ai metodi per determinare l'asintotica di una somma

Consideriamo una somma del tipo

$$S(n) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Vedremo tre metodi efficaci per determinare l'ordine di crescita asintotico di una somma:

- ➊ **Metodo della forma chiusa:** consiste nel trovare una formula esplicita (forma chiusa) della somma e successivamente analizzare il suo comportamento asintotico.
- ➋ **Metodo dei limiti asintotici delle somme:** si basa sul confronto tra somme limitate superiormente e inferiormente da altre somme più semplici, per ottenere limiti O e Ω , e da questi dedurre la classe Θ .
- ➌ **Metodo dell'integrale:** si approssima la somma tramite l'integrale della funzione corrispondente, ottenendo un'approssimazione continua utile per stimare l'asintotica.

Nei prossimi frame vedremo ciascuno di questi metodi con esempi e applicazioni pratiche.

Metodo della forma chiusa

Consideriamo una somma

$$S(n) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Il **metodo della forma chiusa** consiste in:

- 1 Trovare una *formula chiusa* per la somma, cioè esprimere $S(n)$ come funzione di n senza la sommatoria.
- 2 Applicare il limite del rapporto su quella formula chiusa per dedurre l'ordine asintotico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{g(n)} = L, \quad L \in (0, \infty) \implies S(n) \in \Theta(g(n)).$$

Esempio: somma aritmetica e formula chiusa (1 1)

Consideriamo la somma:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i.$$

Questa somma è nota come **somma aritmetica** e possiamo dimostrare che la sua formula chiusa è:

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione:

Scriviamo la somma in avanti e all'indietro:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n,$$

$$S(n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1.$$

Sommiamo membro a membro:

$$2S(n) = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1).$$

Poiché ci sono n termini tutti uguali a $n+1$, otteniamo:

$$2S(n) = n(n+1) \implies S(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esempio: somma aritmetica e formula chiusa (2 2)

Abbiamo visto che

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Per trovare l'ordine di crescita asintotico di $S(n)$, consideriamo il limite del rapporto con la funzione candidata $g(n) = n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Poiché il limite è un valore finito e positivo, concludiamo che

$$S(n) \in \Theta(n^2).$$

Esempio: somma geometrica e formula chiusa (1/3)

Consideriamo la somma

$$S(n) = \sum_{i=1}^n c^i,$$

dove c è una costante reale positiva.

Questa somma è nota come **somma geometrica**.

Il comportamento asintotico della somma dipende dal valore della costante c . Prima di analizzarlo, dimostriamo la formula chiusa della somma.

Esempio: somma geometrica, dimostrazione della formula chiusa (2/3)

Sia $S(n) = \sum_{i=1}^n c^i = c + c^2 + c^3 + \dots + c^n$.

Moltiplichiamo ambo i membri per c :

$$c \cdot S(n) = c^2 + c^3 + \dots + c^{n+1}.$$

Ora sottraiamo la seconda equazione dalla prima:

$$S(n) - c \cdot S(n) = c - c^{n+1}.$$

Raccogliamo $S(n)$ a sinistra:

$$S(n)(1 - c) = c(1 - c^n).$$

Se $c \neq 1$, possiamo dividere ambo i membri per $1 - c$:

$$S(n) = \frac{c(1 - c^n)}{1 - c}.$$

Infine, possiamo riscriverla anche come:

$$S(n) = \frac{c^{n+1} - c}{c - 1}.$$

Esempio somma geometrica: analisi asintotica (3/3)

Ora analizziamo l'asintotica della somma:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n c^i$$

nei tre casi principali:

- **Caso 1:** $c = 1$

$$S(n) = \sum_{i=1}^n 1 = n \Rightarrow \Theta(n)$$

- **Caso 2:** $c > 1$

$$S(n) = \frac{c^{n+1} - c}{c - 1} \Rightarrow \Theta(c^{n+1})$$

- **Caso 3:** $0 < c < 1$

$$S(n) = \frac{c - c^{n+1}}{1 - c} < \frac{c}{1 - c} \Rightarrow \Theta(1)$$

Conclusione: il comportamento asintotico della serie geometrica dipende fortemente dal valore della base c .

Metodo dei limiti asintotici per somme

Questo metodo consiste nel costruire una stima *superiore* e una *inferiore* della somma, confrontando i termini con funzioni più semplici:

- 1 Stima superiore: trovare $g(i)$ tale che $a_i \leq g(i)$ per ogni i e usare $\sum g(i)$ come bound superiore.
- 2 Stima inferiore: trovare $h(i)$ tale che $a_i \geq h(i)$ per ogni i e usare $\sum h(i)$ come bound inferiore.
- 3 Se i bound superiore e inferiore portano allo stesso ordine Θ , allora si conclude $S(n) \in \Theta(\cdot)$.

Metodo dei limiti asintotici: somma dei logaritmi

$$\sum_{i=1}^n \log i$$

Vogliamo determinare l'asintotica della somma:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \log i.$$

Limite superiore: per ogni $i \leq n$, $\log i \leq \log n$, quindi:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \log i \leq \sum_{i=1}^n \log n = n \cdot \log n.$$

Dunque: $S(n) \in O(n \log n)$.

Limite inferiore: per ogni $i \geq n/2$, $\log i \geq \log(n/2)$, e ci sono $n/2$ termini:

$$S(n) \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^n \log i \geq \frac{n}{2} \cdot \log(n/2) = \frac{n}{2} \cdot (\log n - \log 2).$$

Poiché $\log 2$ è costante, otteniamo:

$$S(n) \in \Omega(n \log n).$$

Esempio: somma di potenze $\sum_{i=1}^n i^c$

Consideriamo $S(n) = \sum_{i=1}^n i^c$. dove $c > 0$ è una costante reale.

Stima superiore: ogni termine è al più n^c , quindi:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i^c \leq \sum_{i=1}^n n^c = n \cdot n^c = n^{c+1}.$$

quindi $S(n) \in O(n^{c+1})$.

Stima inferiore: per $i \geq n/2$, $i^c \geq (n/2)^c$, e ci sono $n/2$ termini:

$$S(n) \geq \sum_{i=n/2}^n i^c \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^c = \frac{n^{c+1}}{2^{c+1}}.$$

Quindi $S(n) \in \Omega(n^{c+1})$.

Conclusione: Poiché $S(n) \in O(n^{c+1})$ e $S(n) \in \Omega(n^{c+1})$,

$$S(n) \in \Theta(n^{c+1}).$$

Metodo dell'integrale: idea generale

Quando non è nota una forma chiusa, possiamo approssimare la somma con un integrale:

$$\sum_{i=1}^n f(i) \approx \int_1^n f(x) dx.$$

Se f è monotona, si possono usare le disuguaglianze:

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x) dx$$

(se f crescente) oppure

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

(se f decrescente).

Esempio: somma armonica

Consideriamo

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Approssimiamo con l'integrale:

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Quindi si conclude che

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \in \Theta(\log n).$$

Esempi: somme di potenze e logaritmi

Somma di potenze:

$$\sum_{i=1}^n i^c, \quad c > 0.$$

Usiamo integrale:

$$\int_1^n x^c dx = \frac{n^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} \sim \frac{n^{c+1}}{c+1} \Rightarrow \Theta(n^{c+1}).$$

Somma di logaritmi:

$$\sum_{i=1}^n \log_2 i.$$

Approssimando abbiamo

$$\int_1^n \log_2 x dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x dx = \frac{1}{\ln 2} [x \ln x - x]_1^n \sim \frac{n \ln n}{\ln 2} \Rightarrow \Theta(n \log n).$$

Conclusione sui metodi delle somme

Ecco un riepilogo:

- Il **metodo della forma chiusa** è potente quando si dispone già di una formula esplicita.
- Il **metodo dei limiti asintotici** consente di trovare bounds superiore e inferiore e chiudere la forchetta.
- Il **metodo dell'integrale** è utile quando non si conosce una forma chiusa e $f(i)$ è monotona: si approssima la somma con un integrale continuo.

I vari metodi portano allo stesso risultato asintotico, e sceglierne uno dipende da praticità e conoscenza delle formule.

ESERCIZI

Suggerimento: Prima di cercare le soluzioni in rete, prova a ragionarci da solo: gli esercizi che seguono sono pensati per aiutarti a mettere alla prova la tua comprensione, la tua capacità di sviluppare una prova di correttezza e costruire un algoritmo corretto.

Solo dopo averci riflettuto, confronta la tua soluzione con altre possibili versioni.

Esercizi 1

Considera la seguente lista di funzioni:

$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$	$\lg n^n$
n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{\lg n}}$
$\lg \lg n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	5	$\lg n$
$2^{\lg n}$	$4^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	$2^{2^{n+1}}$	$(n+1)!$
e^n	$n \cdot \lg n$	2^n	n	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$
$(\frac{3}{2})^n$				

- 1 Ordina le funzioni in base alla loro crescita asintotica, dalla più lenta alla più veloce.
- 2 Partiziona la lista di funzioni in classi di complessità asintotica, raggruppando insieme quelle che appartengono alla stessa classe.

1 Applicando il metodo del limite del rapporto dimostra o confuta le seguenti affermazioni :

- ① $f(n) = 10n^3 + 2n^2$ appartiene a $\Omega(n^4)$.
- ② $f(n) = 3n^2 + 5n + 2$ appartiene a $O(n^2)$.
- ③ $f(n) = 7n^3 + 2n^2 + 4n + 6$ appartiene a $\Omega(n^3)$.
- ④ $f(n) = n^2 + 3n$ appartiene a $\Theta(n^2)$.
- ⑤ $f(n) = 4n^2 + 3n$ appartiene a $O(n \log^2 n)$.
- ⑥ $f(n) = 2n^2 \log n + 5n + 1$ appartiene a $\Theta(n^2)$.
- ⑦ 4^n appartiene a in $O(2^n)$.
- ⑧ $(n + 10)^3$ appartiene a in $\Theta(n^3)$

2 Dimostra o confuta che:

- ① le due classi $O(5^n)$ e $O(2^n)$ sono inconfrontabili.
- ② le due classi $\Omega(5^n)$ e $\Omega(2^n)$ sono inconfrontabili.
- ③ le due classi $\Theta(5^n)$ e $\Theta(2^n)$ sono inconfrontabili.