Corso di Laurea in Informatica - AA 2019-20

ALGEBRA

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

Sessione invernale - II Appello- Prova scritta

07 febbraio 2020

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi. Il compito deve essere consegnato ordinato e leggibile in caso contrario non sarà valutato.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Considerato il gruppo moltiplicativo $(U(\mathbf{Z}_{15}),\cdot)$ dell'anello delle classi resto modulo 15, determinare tutti i suoi sottogruppi ciclici e il diagramma di Hasse dell'insieme parzialmente ordinato costituito da tali sottogruppi, si tratta di un reticolo? Il gruppo moltiplicativo $(U(\mathbf{Z}_{15}),\cdot)$ è ciclico?

ESERCIZIO 1.2. Nel gruppo simmetrico S_5 è assegnato un 3-ciclo σ e una trasposizione τ disgiunti (dunque essendo disgiunti $\sigma\tau = \tau\sigma$). Determinare il sottoinsieme H di S_5 costituito da tutti i prodotti finiti di σ e di τ e verificare che H è un sottogruppo di S_5.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Siano $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali e $\mathbf{M_2}(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale su R delle matrici quadrate di ordine 2. Sia L il morfismo da $\mathbf{R}_2[x]$ in $\mathbf{M_2}(\mathbf{R})$ definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} -b & a+c \\ a-c & b-c \end{pmatrix}$$

Determinare:

i. Una base del nucleo e una dell'immagine di L.
ii. La matrice associata ad L rispetto alle basi: $B = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ e $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ESERCIZIO 2.2. Al variare del parametro reale k, sia $L_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base $B = \{(1,1,1);(1,1,0); (1,0,0)\}$, dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ (1-k) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare: a) l'immagine, il nucleo, la dimensione degli autospazi di L_k,
b) i valori di k per cui L_k si diagonalizza.