Corso di Laurea in Informatica - AA 2019-20

ALGEBRA

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

Sessione invernale - I Appello- Prova scritta

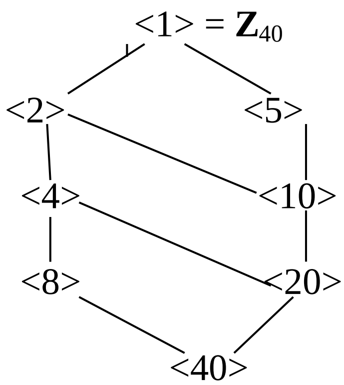
08 gennaio 2020

SOLUZIONI

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Considerato l'anello delle classi resto ($\mathbf{Z}_{40}$, +, ·), determinare il reticolo dei sottogruppi del gruppo additivo ($\mathbf{Z}_{40}$,+) e il suo diagramma di Hasse. Determinare gli elementi del gruppo moltiplicativo (U($\mathbf{Z}_{40}$),·). Tale gruppo è ciclico?

Soluzione. Il gruppo additivo ($\mathbf{Z}_{40}$,+) ha ordine 40 ed è un gruppo ciclico con generatore (ad esempio) 1. Pertanto i suoi sottogruppi sono tutti del tipo k $\mathbf{Z}_{40}$ dove k è un divisore di 40 ed inoltre si ha $|k\ \mathbf{Z}_{40}| = h$ con $40 = kh$. Pertanto il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di ($\mathbf{Z}_{40}$,+) è:



Il gruppo moltiplicativo (U($\mathbf{Z}_{40}$),·) ha ordine 16 (il valore che la funzione di Eulero assume in n = 40) , i suoi elementi sono le classi resto k, con k primo con 40. Ogni gruppo ciclico possiede un solo sottogruppo di ordine h, essendo h un divisore dell'ordine del gruppo; pertanto un gruppo ciclico di ordine 16 possiede un solo sottogruppo di ordine 2 ossia un solo elemento di ordine 2. Il gruppo (U($\mathbf{Z}_{40}$),·) invece possiede almeno due elementi di ordine 2, ad esempio 9 e 11, pertanto non è ciclico.

ESERCIZIO 1.2. Nel gruppo simmetrico S_5 è assegnata la permutazione

$$\sigma = (1\ 4)(3\ 5)(4\ 3\ 2\ 5).$$

Determinare l'ordine, la parità di σ e tutti i sottogruppi di <σ>. Definire almeno due isomorfismi dal gruppo ciclico <σ> al gruppo $(Z_n,+)$, per un determinato n >1.

Soluzione. Si rappresenti σ come prodotto di cicli disgiunti: σ = (134) (25). Il suo periodo è o(σ) = 6 (mcm delle lunghezze dei suoi cicli). Inoltre σ è una permutazione dispari essendo il prodotto di una permutazione pari (134) e una dispari (25). Si ha: $\sigma^2 = (134)^2(25)^2= (134)^2 = (143)$; $\sigma^3 = (134)^3(25)^3 = (25)$; $\sigma^4 = (134)^4(25)^4 = (143)^2 = (134)$; $\sigma^5 = \sigma^2\, \sigma^3 =(143)(25)$; $\sigma^6 = I$. Il gruppo generato da σ è isomorfo al gruppo ciclico $(\mathbf{Z}_6, +)$ e quindi ha due sottogruppi non banali, uno di ordine 2 e uno di ordine 3. Il sottogruppo di ordine 2 è <(25)>, mentre il sottogruppo di ordine 3 è <(134)>.

Per definire un isomorfismo tra due gruppi ciclici dello tesso ordine basta associare ad un generatore del primo gruppo un generatore del secondo gruppo e a ogni potenza del generatore del primo gruppo la stessa potenza del generatore del secondo gruppo. Pertanto, essendo σ e σ^5 i due generatori di <σ> e 1 e 5 i due generatori di $(\mathbf{Z}_6, +)$, si otterranno 6 isomorfismi dal gruppo <σ> al gruppo $(\mathbf{Z}_6, +)$.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$, si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \langle (1,1,1,2); (1,2,2,1) \rangle \text{ e } W = \{(x,y,z,t) : y = z = 0\}.$$

Determinare una base e equazioni cartesiane per (U+W) e (U∩W). Prolungare una base di (U+W) ad una base di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione. Per determinare le equazioni di U, si consideri la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Equivalente per righe alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & t-3x \end{pmatrix}$$

dalla quale si evince dim U = 2. Inoltre, imponendo la condizione che il vettore generico (x,y,z,t) appartenga ad U si ottengono le equazioni cartesiane di U:

$$\begin{cases} z-y=0 \\ t-3x=0 \end{cases}$$

Pertanto le equazioni cartesiane di (U∩W) sono : $\begin{cases} z=y=0 \\ t-3x=0 \end{cases}$ e {(1,0,0,3)} è una sua base.

Una base di W è {(1,0,0,0); (0,0,0,1)} e dalla formula di Grassmann si ricava che dim (U+W) = 3. Poiché (U+W) è generato dall'unione di una base di U e una di W, una base di (U+W) è B = { (1,0,0,0); (0,0,0,1); (1,1,1,2)}. La matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

È equivalente per righe alla matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & t \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & z-y \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'equazione cartesiana di (U+W) è $z - y = 0$. Per prolungare la base B ad una base di $\mathbf{R}^4$, basta aggiungere a B il vettore della base canonica che non appartiene a (U+W) ossia il vettore (0,1,0,0).

ESERCIZIO 2.2. Sia L : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (2x\text{-}2y\text{-}z, y, z).$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio,
c) la matrice associata a L rispetto alla base B ={(1,-1,2); (1,0,0); (1,1,0)}.

Verificare infine se L possa essere rappresentata da una matrice diagonale D ed in tal caso trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

Soluzione. La matrice A ha per colonne le coordinate (rispetto alla base canonica) dei trasformati dei vettori (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1) e dunque

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di L sono gli zeri del polinomio caratteristico det $(A\text{-}\lambda I)$. In questo caso, essendo la matrice triangolare, det $(A\text{-}\lambda I)$. $= (1\text{-}\lambda)^2(2\text{-}\lambda)$ e dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1.

Le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori dell'autospazio E(1) di L relativo all'autovalore 1 sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

pertanto una base di E(1) = ker(A-I) è {(1,1,−1), (1,0,1)}.

Le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori dell'autospazio E(2) di L relativo all'autovalore 2 sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Una base di E(2) = ker(A-2I) è quindi {(1,0,0)}. Pertanto una matrice diagonale che rappresenta L rispetto alla base di autovettori: {(1,1,−1), (1,0,1), (1,0,0)} è:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a L rispetto alla base B ha per colonne le coordinate dei vettori L(1,-1,2); L(1,0,0); L(1,1,0) sempre rispetto alla base B. Si ha:

$$L(1,-1,2) = (2x-2y-z, y, z).\ (2,-1,2) = 1(1,-1,2) + 1(1,0,0);$$

$$L(1,0,0) = (2,0,0) = 2\,(1,0,0);$$

$$L(1,1,0) = -1(1,0,0) + (1,1,0)$$

E quindi la matrice associata ad L rispetto a B è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e D sono simili e si ha A= $P^{-1}DP$ dove P^{-1} è la matrice associata all'identità rispetto alla base di autovettori {(1,1,−1), (1,0,1), (1,0,0)} e alla base canonica, pertanto risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (calcolata ad esempio con il metodo dell'aggiunta).