ALGEBRA (M-Z)

(2018-19)

SCHEDA 3

Strutture algebriche con una operazione

1.STRUTTURE ALGEBRICHE

1.1. Siano $(A,\cdot)$ e $(A',\bullet)$ strutture algebriche e sia f: $A\rightarrow A'$ un morfismo, ossia:

$$f(a\cdot b)= f(a)\bullet f(b) \text{ per ogni } a,b\in A,$$

dimostrare che $(A/\sim_f,\cdot)$, dove $\sim_f$ è il nucleo di equivalenza di f (relazione di equivalenza), è una struttura algebrica isomorfa ad $(A',\bullet)$.(**Teorema di omomorfismo per le strutture algebriche).**

1.2. Siano $(A,\cdot)$ e $(A',\bullet)$ strutture algebriche. Dimostrare che la composta di morfismi e l'inversa di un morfismo sono morfismi.

Un ***monoide*** $(M,\bullet)$ *è una struttura algebrica associativa con unità* 1_M. L'elemento 1_M è l'unico elemento di M tale che per ogni $x\in M$ si ha $x \bullet 1_M= 1_M\bullet x$.

Sia $(M,\bullet)$ *un monoide e sia* $a\in M$. Le ***iterazioni della operazione*** sono definite da:

$$a^0= 1_M,\ a^{n+1} = a\bullet a^n.$$

1.3.Dimostrare che $a^m\bullet a^n= a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$.

1.4. Sia $(M,\bullet)$ un monoide e sia $a\in M$. Dimostrare che esiste un solo morfismo di monoidi $f : (\mathbf{N},+) \rightarrow (M,\bullet)$ tale che $f(1) = a$.

1.5. Siano $(M,\cdot)$ e $(M',\bullet)$ monoidi e sia f: $M\rightarrow M'$ un morfismo di monoidi, dimostrare che $(M/\sim_f,\cdot)$, dove $\sim_f$ è il nucleo di equivalenza di f (relazione di equivalenza), è un monoide isomorfo ad $(M',\bullet)$.(**Teorema di omomorfismo per i monoidi).**

2.GRUPPI.

2.1. Determinare quali delle seguenti strutture algebriche $(A,\cdot)$ sono monoidi e quali gruppi:

- A= Z, con $a\cdot b = a-b$.
- A = Z-{0}, con l'usuale prodotto.
- A= $\{p/q\in Q$: MCD(p,q) =1 q è dispari},con $a\cdot b = a+b$.
- A= {0,1,2,3,4 } $a\cdot b$ = resto della divisione per 5 di $a+b$.
- A={0,1,2,3,4 } $a\cdot b$ = resto della divisione per 5 di *a per b*.

- $A = \{1,2,3,4,5\}$ $a \cdot b$ = resto della divisione per 6 di *a per b.*

2.2. Dimostrare che in un gruppo (G,·) valgono le leggi di cancellazione a sinistra : $g \cdot h = g \cdot k$ implica $h = k$; e a destra: $h \cdot g = k \cdot g$ implica $h = k$ e che $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$.

2.3. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè f: G→G' sia un morfismo dal gruppo (G,·) al (G',•) è che si abbia $f(a \cdot b) = f(a) \bullet f(b)$ per ogni $a,b \in G$.

2.4. Siano (G,·) e (G',•) gruppi e sia f: G→G' un morfismo di gruppi, dimostrare che $(G/\sim_f, \cdot)$, dove $\sim_f$ è il nucleo di equivalenza di f , è un gruppo isomorfo ad (G',•).**(Teorema di omomorfismo per i gruppi)**

2.5. Sia (G,·) un gruppo. Verificare che l'insieme degli automorfismi (isomorfismi f :G→G) è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni. Tale gruppo sarà indicato con Aut(G) e si chiama ***gruppo delle trasformazioni di*** G.

2.6. Dimostrare che se (G,·) è una struttura algebrica associativa tale che:

- G è finito,
- in G valgono le leggi di cancellazione.

Allora (G,·) è un gruppo. (cfr. "Algebra Moderna" pag. 61)

2.7. Sia (G,·) un gruppo. Dimostrare che un sottoinsieme S non vuoto di G è un sottogruppo se e solo se per ogni $s,t \in S$ si ha: $s \cdot t^{-1} \in S$.

2.8. Sia E un insieme e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Posto:

$$G(A) = \{f \in S(E) : f(a) = a, \text{ per ogni } a \text{ di } A\}$$

dimostrare che G(A) è un sottogruppo di S(E). (cfr."Algebra Moderna"pag. 53)

2.9. Sia n un numero intero maggiore di 1. Verificare che l'insieme dei multipli interi di n è un sottogruppo di Z.

2.10. Sia $Q = \{1,-1,i,-i, j,-j,k,-k\}$ con l'operazione · definita da:

$$i^2, j^2, k^2 = -1,\ i \cdot j = k$$

è un gruppo chiamato *gruppo dei quaternioni.* Determinare tutti i sottogruppi di tale gruppo. (cfr. "Algebra moderna" pag. 51). Scrivere la tabella di composizione.

2.11. Siano (G,·) un gruppo e X un insieme non vuoto, definire una struttura di gruppo nell'insieme G^X delle applicazioni da X in G.

2.12. Siano (G,·) e (H,*) gruppi, definire una struttura di gruppo nell'insieme prodotto GxH.

2.13. Sia (G,·) un gruppo finito dimostrare che un sottoinsieme non vuoto T di G è un sottogruppo se e solo se T è chiuso.

2.14. Si consideri in **Q** l'operazione * definita ponendo $x*y = 3xy/2$. Che tipo di struttura è (**Q**,*)?

2.15. Dato un gruppo (G,·) e un elemento g di G dimostrare che esiste un solo morfismo di gruppi f: (**Z**,+) → (G,·) tale $f(1) = g$.

2.16. Sia f: (G,·) → (H,·) un morfismo di gruppi dimostrare che se T è un sottogruppo di G allora f(T) è un sottogruppo di H.

2.17. Si consideri in **Q** l'operazione * definita ponendo $x*y = (x+y)-1/3$. Che tipo di struttura è (**Q**,*)?

2.18. Si consideri la struttura algebrica (2**Z**,*) dove 2**Z** è l'insieme dei numeri pari e * è l'operazione su 2**Z** definita da $z*w = 4z+4w-zw/2 -24$. Si provi che tale struttura è un gruppo. Si consideri l'applicazione *f* :(**Z**,·) → (2**Z**,*) definita ponendo *f*(x) = 8-2x. Verificare che *f* è un isomorfismo di gruppi, ossia :

- *f* è biunivoca,
- *f* è un morfismo di gruppi.

2.19.Dimostrare che se H e T sono sottogruppi del gruppo (G,·) allora H∩T è un sottogruppo di G.

2.20. Sia X = {a,b,c}. Si consideri la struttura algebrica (X,*) dove * è definita dalla seguente tavola di composizione:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Quali sono le proprietà di *? Che tipo di struttura algebrica è (X,*)?

2.21. Sia E un insieme e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Posto:

$$G(A) =\{f \in S(E) : f(A) = A\}$$

dimostrare che G(A) è un sottogruppo di S(E).

2.22. Sia (G, ·) un gruppo e $a \in G$, dimostrare che esiste un solo morfismo di gruppi *f* dal gruppo (Z,+) nel gruppo (G, ·) tale che *f*(1) = *a.*

Teorema di Lagrange: Sia (G, ·) un gruppo finito e H un suo sottogruppo. L'ordine di H divide l'ordine di G. In particolare l'ordine o(a) di un elemento $a \in G$ (per definizione o(*a*) = |<IaI>|) divide l'ordine di |G|.

2.23. Sia (G, ·) un gruppo finito. Dimostrare che per ogni $a \in G$ si ha $a^{|G|} = 1_G$.

2.24. Dimostrare che ogni gruppo finito di ordine *p* con *p* primo è ciclico.

3.Il gruppo Simmetrico

3.1.Esprimere le seguenti permutazioni rappresentate da una parola come prodotto di cicli disgiunti: $\sigma_1 = 537824169$, $\sigma_2 = 935128746$, $\sigma_3 = 524983176$, $\sigma_4 = 736892154$. Rappresentarle in forma standard come prodotto di cicli.

3.2. Verificare se σ è una permutazione di S_n esiste k in **N** non nullo tale che $\sigma^k = 1$, il più piccolo di tali interi si dice ordine di σ. Dimostrare che l'ordine di una permutazione e il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli.

3.3. Sia $\sigma \in S_n$, verificare che due cicli disgiunti di σ commutano.

3.4. Determinare la parità delle permutazioni in 3.1. ed esprimerle come prodotto di trasposizioni.

3.5. Verificare che se σ è una permutazione di S_n di classe dispari, allora per ogni

permutazione τ si ha $\tau^2 \neq \sigma$.
3.6.Dimostrare che ogni permutazione è il prodotto di permutazioni 3-cicliche.
3.7.Dimostrare che se X ed Y sono insiemi equipotenti allora l'insieme S(X) delle permutazioni di X è equipotente all'insieme S(Y) delle permutazioni di Y.
3.8.Dimostrare l'insieme A_n delle permutazioni pari è un sottogruppo normale del gruppo simmetrico $S_{n.}$ di cardinalità n!/2.