Corso di ALGEBRA (M-Z)

2018-19

PRINCIPIO DI INCLUSIONE -ESCLUSIONE

Principio di inclusione-esclusione. Sia t>1 e siano $A_1,\ldots A_t$ sottoinsiemi finiti di un insieme R . Allora si ha:

$$|\cup_{i=1,..t} A_i| = \Sigma_{\emptyset \neq I} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i\in I} A_i|$$

dove la somma è estesa a tutti i sottoinsiemi non vuoti I dell'insieme $\{1,\ldots,t\}$.

Dim. Sia x un elemento di $(\cup_{i=1,..t} A_i)$ e siano $A_{i_1},\ldots, A_{i_n}$ tutti i sottoinsiemi contenenti x. Allora il contributo di x alla somma è: $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}$ e risulta

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}$$

Da cui: $-1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j} = -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}$ ossia: $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j} = 1$.

□

Applicazioni del Principio di inclusione-esclusione.

Esempio 1. Funzione di Eulero. Due interi *m,n* si dicono *primi tra loro* o *coprimi* se l'unico divisore che hanno in comune è 1. La funzione di Eulero è la funzione :

$\phi : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$ definita da : $\phi(1) = 1$ e se $n \neq 1$ $\phi(n)$ = numero degli interi minori di n e primi con n.

Ogni intero maggiore o uguale a 2 si può ottenere in modo unico come prodotto di potenze di numeri primi. Sia $n = p_1^{h_1} \ldots . p_k^{h_k}$ (scomposizione irriducibile dell'intero n). Si ponga

$$A_p = \{m \in [n]: m \text{ è divisibile per } p\}$$

Allora $|A_p|$ è uguale alla parte intera di n/p in quanto ogni multiplo intero di p minore o uguale ad n si ottiene moltiplicando p per un intero minore o uguale a n/p, dunque se p un divisore primo di n, risulta $|A_p| = n/p$. Si ha:

$$\phi(n) = |[n]| - |\cup_{p \text{ divisore primo di } n} A_p|$$

e quindi per il principio di inclusione esclusione:

$$\phi(n) = n - [n/p_1+\ldots+n/p_k - n/p_1p_2 - \ldots - n/(p_{k-1}p_k) + n/(p_1p_2p_3) + \ldots + n/(p_{k-2}p_{k-1}p_k) +$$
$$+ \ldots . + (-1)^{k-1}(n/(p_1p_{2\ldots}p_k)\ ] = n\ (1- 1/p_1)\ldots\ (1- 1/p_k).$$

□

Esempio 2. Permutazioni senza punti fissi. Usando il principio di inclusione esclusione è possibile determinare il numero d_n delle permutazioni di S_n senza punti fissi (forma chiusa). Sia A(i) il sottoinsieme di S_n costituito da tutte le permutazioni che fissano $i\in[n]$. Risulta $|A(i_1)\cap\ldots\cap A(i_k)| = (n-k)!$, pertanto:

$$d_n = n! - |A(1)\cup\ldots\cup A(n)| = n! - (n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! + \ldots + (-1)^{n-1}) =$$
$$= n!(\ 1-1/1!+1/2!-1/3!+\ldots+(-1)^n\ 1/n!).$$

□

Esempio 3. Funzioni suriettive. Si indichi con *Sur*(X,[m]) l'insieme delle funzioni suriettive definite su un insieme X con *n* elementi e a valori in [m] . Sia $[m]^n$ l'insieme delle funzioni da X in [m] e per ogni $i\in[m]$ sia A(*i*) il sottoinsieme costituito dalle funzioni la cui immagine non contiene *i*. Risulta :

$$|A(i)| = (m-1)^n, \quad |A(i_1)\cap\ldots\cap A(i_k)| = (m-k)^n$$

e quindi, per il principio di inclusione- esclusione, il numero delle funzioni suriettive è:

$$m^n - |A(1)\cup\ldots\cup A(m)| = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n + \ldots$$

da cui l'identità:

$$|Sur(X,[m])| = \sum_{o\le k\le m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$$

□

Esempio 4. Anagrammi. Quanti "anagrammi", anche privi di senso, si possono formare dalla parola "MASSIMALISTA"? Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze STA, AMA, ALA?

Ogni anagramma corrisponde biunivocamente ad una classe di equivalenza di S_{12} (insieme delle permutazioni dei 12 posti) rispetto alla relazione di equivalenza: $\sigma\sim\mu$ se e solo se σ e μ individuano lo stesso anagramma, ogni classe di equivalenza ha lo stesso numero di elementi 3!3!2!2! e dunque il numero di tali anagrammi è $\frac{12!}{3!3!2!2!}$.

Siano: A_1 l'insieme degli anagrammi che contengono la sequenza STA, A_2 l'insieme degli anagrammi che contengono la sequenza AMA e A_3 l'insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ALA. Dunque l'insieme degli anagrammi che contengono almeno una delle tre sequenze è $(A_1\cup A_2\cup A_3)$. Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$.

Risulta:

$|A_1| = \frac{10!}{2!2!2!2!}$, in quanto ogni anagramma di A_1 corrisponde biunivocamente ad una 6-scomposizione $E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6 = [10]$ dell'insieme [10] con $|E_1|=1$, $|E_2|=2$, $|E_3|=2$, $|E_4|=1$, $|E_5|=2$, $|E_6|= 2$ dove E_i è l'insieme dei posti in cui compare la lettera i-esima dell'alfabeto $\mathcal{A}_1 = \{(STA),A,I,L,M,S\}$.

$|A_2| = \frac{10!}{2!3!}$, in quanto ogni anagramma di A_2 corrisponde biunivocamente ad una 7-scomposizione $E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6+E_7 = [10]$ dell'insieme [10] con $|E_1|=1$, $|E_2|=1$, $|E_3|=2$, $|E_4|=1$, $|E_5|=1$, $|E_6|= 3$, $|E_7|=1$, dove E_i è l'insieme dei posti in cui compare la lettera i-esima dell'alfabeto $\mathcal{A}_2 = \{(AMA),A,I,L,M,S,T\}$.

$|A_3| = \frac{10!}{2!2!3!}$, in quanto ogni anagramma di A_3 corrisponde biunivocamente ad una 6-scomposizione $E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6 = [10]$ dell'insieme [10] con $|E_1|=1$, $|E_2|=1$, $|E_3|=2$, $|E_4|=2$, $|E_5|=3$, $|E_6|= 1$ dove E_i è l'insieme dei posti in cui compare la lettera i-esima dell'alfabeto $\mathcal{A}_1 =\{$(ALA),A,I,M,S,T$\}$.

$|A_1 \cap A_2| = \frac{8!}{2!2!} + \frac{8!}{2!2!}$ in quanto è la cardinalità dell'unione di due classi: quella costituita dagli anagrammi della parola (AMA)(STA)IILMSS e quella costituita dagli anagrammi della parola (STAMA)AIILMSS.

$|A_2 \cap A_3| = \frac{8!}{2!3!} + \frac{8!}{2!3!}$, in quanto è la cardinalità dell'unione di due classi: quella costituita dagli anagrammi della parola (AMALA)IIMSSST e quella costituita dagli anagrammi della parola (ALAMA)IIMSSST.

$|A_3 \cap A_1|= \frac{8!}{2!2!2!} + \frac{8!}{2!2!2!}$, in quanto è la cardinalità dell'unione di due classi: quella costituita dagli anagrammi della parola (STA)(ALA)IIMMSS e quella costituita dagli anagrammi della parola (STALA)AIIMMSS.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|= \frac{6!}{2!2!} + \frac{6!}{2!2!}$ in quanto è la cardinalità dell'unione delle seguenti classi: della classe costituita dagli anagrammi della parola (STAMALA)IIMSS e di quella costituita dagli anagrammi della parola (STALAMA)IIMSS.