CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2018-19

Complementi ed Esercizi

DETERMINANTI

Una matrice quadrata di ordine 2, A $=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad\text{-}bc \neq 0$. Infatti se $ad = bc$ allora le righe di A sarebbero proporzionali, dunque il rango di A sarebbe <2 e quindi A non sarebbe invertibile; viceversa se A non è invertibile allora $(a,b) = k\,(c,d)$ da cui: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ e quindi $ad\text{-}bc = 0$. E' possibile dunque definire una applicazione d dallo spazio vettoriale $M_2(\mathbf{R})$ in $\mathbf{R}$ che ad ogni matrice A $= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ associa il numero reale d(A) $=(ad\text{-}bc)$, tale applicazione si annulla se e solo se la matrice A non è invertibile (e quindi se ha rango minore di 2). Il valore d(A) ha il seguente significato geometrico: è la misura, con segno, dell'area del parallelogramma individuato dai vettori v(a,c) e w(c,d), rispetto all'unità di misura data dall'area del parallelogrammo individuato dai vettori i e j della base di V_0. Il segno viene preso positivo o negativo a seconda che la rotazione che porta v in w abbia lo stesso verso o verso opposto alla rotazione che porta i in j.

Si vuole definire per ogni n una funzione $d_n : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ tale che $d_2 = d$.

Si osservi che la funzione d ha le seguenti proprietà rispetto all'eliminazione di Gauss.

1. Se A' è una matrice ottenuta moltiplicando una riga della matrice A per uno scalare non nullo allora: d(A') = k d(A).
2. Se A' è una matrice ottenuta scambiando due righe della matrice A allora d(A') = -d(A).
3. Se A' è ottenuta dalla matrice A sostituendo alla i-iesima riga A_i la combinazione lineare $A_i + kA_j$, $i \neq j$, allora d(A') = d(A).
4. d(I) = 1.

Quindi d_n deve soddisfare la proprietà 1-4. Dalle suddette proprietà si deducono facilmente le seguenti:

5. Se A è una matrice con due righe uguali allora $d_n(A) = 0$.

Infatti per la 2: $d_n(A) = -d_n(A) = 0$.

6. Se A ha una riga nulla allora $d_n(A) = 0$.

Infatti la matrice A può essere ottenuta da una matrice con due righe uguali alla quale si sostituisce ad una delle due righe la loro sottrazione, quindi per la 5 e la 3.

7. Se D è una matrice diagonale, ossia $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = 0$ se $i \neq j$, allora

$$d_n(D) = d_{11}d_{22}...d_{nn}.$$

Questa proprietà deriva dalla 4 e dalla 1.

8. Se S è una matrice a scala allora $d_n(S)$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale, ossia $d_n(S) = s_{11}\ldots s_{nn}$. Infatti se $r(S)<n$ allora S ha almeno una riga nulla e quindi almeno uno degli elementi sulla diagonale è uguale a zero per cui $d_n(S) = 0$. Se $r(S) = n$ allora a partire da S, applicando solo l'operazione elementare di sostituzione di una riga con la combinazione lineare della stessa con un'altra riga per uno scalare, si ottiene la matrice diagonale che la cui diagonale è uguale a quella di S e dunque per la 3 e la 7 la tesi. Esempio:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \sim_r \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (alla terza riga si è sostituita la terza + l'ultima moltiplicata per $\frac{2}{5}$) $\sim_r \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (alla seconda riga si è sostituita la seconda riga + l'ultima moltiplicata per $-\frac{3}{5}$) $\sim_r \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \sim_r \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (alla seconda riga si è sostituita la seconda + la terza moltiplicata per$-\frac{3}{2}$) $\sim_r \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \sim_r \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ alla prima riga si è sostituita la prima riga + la seconda moltiplicata per 3.

9. Se A' è una matrice equivalente per righe alla matrice A ed è ottenuta da questa solo con operazioni elementari di scambio di righe o di sostituzione di una riga A_i con la combinazione lineare A_i+kA_j, dove A_j è un'altra riga allora

$$d_n(A') = \pm d_n(A).$$

(per la 2 e 3)

10. $d_n(A) = (-1)^{\sigma}\, s_{11}\ldots\, s_{nn}$, dove $S = (s_{ij})$ è una matrice a scala ottenuta da A solo con le operazioni elementari di scambio di righe o di sostituzione di una riga A_i con A_i+kA_j ($i\neq j$) e σ è il numero di scambi di riga effettuati.

Per la 8 e la 9.

Si è dunque dedotto che non appena una funzione d_n da $M_n(\mathbf{R})$ in $\mathbf{R}$ soddisfa le 1,2,3,4 allora necessariamente si ha $d_n(A) = (-1)^{\sigma}\, s_{11}\ldots\, s_{nn} = \pm d_n(S)$, essendo S una matrice a scala ottenuta da A solo con le operazioni elementari di scambio di righe o di sostituzione di una riga A_i con A_i+kA_j ($i\neq j$). Sembrerebbe quindi che il valore di d_n dipenda dall'eliminazione di Gauss, invece esiste per ogni n una sola funzione d_n soddisfacente 1,2,3,4.

Per dimostrare questo fatto, si considerano le proprietà seguenti che sono equivalenti alle 1,2,3,4. :

a) Se A è una matrice con due righe nulle allora $d_n(A) = 0$

b) Se A' è una matrice che è stata ottenuta da A moltiplicando una riga per uno scalare non nullo allora $d_n(A') = k\, d_n(A)$.

c) Se A' e A'' sono due matrici che si differenziano solo per la riga i-esima allora $d_n(A) = d_n(A')+d_n(A'')$ dove A ha per righe le stesse di A' e A'' tranne l'i-esima che è uguale a $(A_i'+A_i'')$.

d) $d_n(I) = 1$.

La b) e la c) esprimono il fatto che d_n è lineare sulle righe.

Ai fini della dimostrazione di esistenza e unicità del determinante, ci interessa dimostrare che le a),b),c),d) implicano le 1,2,3,4.

Proposizione 1. Sia d_n:$M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ verificante le a),b),c),d) allora il valore di d_n non cambia sommando ad una riga un multiplo di un'altra riga, ovvero la 2. Ossia in

simboli: (se j>i): $d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i+kA_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} = d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}$, dove $\begin{vmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{vmatrix} = A$.

Dim. Utilizzando nell'ordine le proprietà c), b) e a), si ha:

$$d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i+kA_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} = d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} + d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ kA_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} =$$

$$= d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} + k\, d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} = d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix} + 0.$$

Proposizione 2. Sia d_n:$M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ verificante le a),b),c),d) allora il valore di d_n cambia di segno se si scambiano due righe, ovvero in simboli: (se j>i):

$$d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix} = - d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Dim. Utilizzando nell'ordine le proprietà a),c), a), si ha:

$$d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}+d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=$$

$$= d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}+ d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}+ d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}+ d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=$$

$$= d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j+A_i\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}+ d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i+A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}= d_n\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j+A_i\\ \vdots\\ A_i+A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=0$$

Proposizione 3. Sia d_n:M_n(**R**)→**R** verificante le a),b),c),d) allora la funzione d_n soddisfa anche le proprietà 1,2,3,4. Quindi $d_n(A) = \pm\, d_n(S) = \pm\, s_{11}\dots s_{nn}$, dove S è una matrice a scala ottenuta da A solo con le operazioni elementari di scambio di righe o di sostituzione di una riga A_i con A_i+kA_j $(i\neq j)$.
Dim. Dalle preposizioni precedenti.

Si osservi che la proprietà a) è equivalente alla proprietà:

a*) Se A è una matrice con due righe consecutive nulle allora $d_n(A) = 0$.

Definizione 1. Data una matrice A di ordine n di definisce **minore di** A **relativo all'elemento** a_{ij} la matrice A_{ij} ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Esempio: A= $\begin{vmatrix}2&3&2&1\\3&5&7&2\\8&3&2&-2\\1&0&5&1\end{vmatrix}$ allora il minore di a_{33} = 2 è A_{33} = $\begin{vmatrix}2&3&1\\3&5&2\\1&0&1\end{vmatrix}$,

il minore di a_{23} = 7 è A_{24} = $\begin{vmatrix}2&3&1\\8&3&-2\\1&0&1\end{vmatrix}$.

Il seguente Teorema dimostra che il valore di $d_n(A)$ dipende solo da A e non dalla eliminazione di Gauss, ossia dalla scelta di S e dagli scambi di righe, e che quindi esiste una sola funzione per ogni n soddisfacente alle 1,2,3,4.

Teorema (esistenza e unicità del determinante). Per ogni n > 1 esiste una sola funzione d_n: M_n(**R**)→**R** verificante le a),b),c),d), tale funzione per ogni matrice A di ordine n è definita da:

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, d_{n-1}(A_{i1})$$ (sviluppo di d_n secondo la prima colonna).

Dim. Per induzione su n. Per n = 2 il teorema è vero. Supponiamo il teorema vero per (n-1)≥ 2 e dimostriamo l'enunciato per n.

La proprietà d) è vera in quanto $d_n(I) = 1\, d_{n-1}(I_{i1}) = d_{n-1}(I_{n-1}) = 1$.

Per la proprietà c), supponiamo che la riga dove avviene la somma sia la riga h e posto:

$$B = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A'_h + A''_h \\ \vdots \end{pmatrix},\quad A' = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A'_h \\ \vdots \end{pmatrix}\quad A'' = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A''_h \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(le tre matrici si differenziano solo sulla riga h-esima), la tesi è:

$$d_n(B) = d_n(A') + d_n(A'').$$

Si osservi che: $b_{i1} = a_{i1}$ se $i \neq h$ e $b_{h1} = a'_{h1} + a''_{h1}$ e per i minori si ha: $B_{h1}= A'_{h1}=A''_{h1}$. Dunque, poiché per l'ipotesi induttiva d_{n-1} gode della proprietà c), risulta:

(1.1) $$b_{i1}\, d_{n-1}(B_{i1}) = \begin{cases} a_{i1}[d_{n-1}(A'_{i1}) + d_{n-1}(A''_{i1})] & \text{se } i \neq h \\ [a'_{h1} + a''_{h1}]d_{n-1}(A'_{h1}) = [a'_{h1} + a''_{h1}]\, d_{n-1}(A''_{h1}) \end{cases},$$

e pertanto :

$$d_n(B) = b_{11}\, d_{n-1}(B_{11}) + \ldots + (-1)^{h+1} b_{h1}\, d_{n-1}(B_{h1}) + \ldots + (-1)^{n+1} b_{n1}\, d_{n-1}(B_{n1}) =$$
$$= a_{11}[d_{n-1}(A'_{11}) + d_{n-1}(A''_{11})] + \ldots + [a'_{h1} + a''_{h1}]d_{n-1}(A'_{h1}) + \ldots$$
$$+(1)^{n+1}[a'_{n1} + a''_{n1}]d_{n-1}(A'_{n1}) = d_n(A') + d_n(A'').$$

La b) si dimostra in modo analogo.

Per la a) dimostriamo il caso in cui la matrice A ha due righe consecutive uguali: la h-esima e la successiva riga (h+1). Per l'ipotesi induttiva (su una matrice di ordine (n-1) con due righe uguali, d_{n-1} assume valore 0), risulta:

$$d_n(A) = (-1)^{h+1} a_{h1}\, d_{n-1}(A_{h1}) + (-1)^{h+2} a_{(h+1)1}\, d_{n-1}(A_{(h+1)1}) =$$
$$= (-1)^{h+1} a_{h1}\, d_{n-1}(A_{h1}) + (-1)^{h+2} a_{h1}\, d_{n-1}(A_{h1}) = 0$$

L'unica funzione d_n:$M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ verificante le a),b),c),d) (e quindi l'unica verificante le 1,2,3,4.) si chiama **determinante** e sarà indicata con det.

Proposizione 4. Sia A $\in M_n(\mathbf{R})$**,** i seguenti enunciati sono equivalenti:

4.1. A è invertibile.

4.2. L'applicazione lineare L_A è invertibile.

4.3. L_A è iniettiva.

4.4. L_A è suriettiva.

4.5. r(A) = *n*,

4.6. le colonna di A son linearmente indipendenti,

4.7. le righe di A sono linearmente indipendenti,

4.8. Il sistema AX = 0 ammette una sola soluzione.

4.9. Per ogni b$\in\mathbf{R}^n$, il sistema AX = b ammette una sola soluzione.

4.10. A è non singolare (ossia è equivalente per righe ad una matrice a scala S con r(S) = *n*.

4.11. $\det(A) \neq 0$
Dim. Esercizio.

E' possibile dimostrare (ripetendo opportunamente la dimostrazione precedente) che il determinante di una matrice può essere calcolato fissando una qualunque colonna ma anche una qualunque riga. Ossia:
$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, d_{n-1}(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, d_{n-1}(A_{ij})$ (sviluppo di Laplace del determinante secondo la i-esima riga). Pertanto risulta: $\det(A) = \det(A^T)$.

Si dimostra facilmente che il determinante della somma di due matrici non è la somma dei determinanti delle due matrici. Riguardo al prodotto per uno scalare si ha :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Per il prodotto di matrici si ha il:

Teorema (di Binet) Se $A,B \in M_n(\mathbf{R})$, allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Dim. Dimostriamo il teorema nel caso:

$\det(AB) = 0$ se e solo se $\det(A) = 0$ oppure $\det(B) = 0$ (ossia AB è singolare se e solo se A o B è singolare)

Se $\det(AB) = 0$ allora il sistema $(AB)X = 0$ ammette soluzioni non nulle (prop. 4), sia $Y \neq 0$ tale che $(AB)Y = 0$. Se $\det B \neq 0$ allora $BY \neq 0$ (prop.4) ma essendo $A(BY) = 0$ necessariamente $\det A = 0$ (prop.4). Viceversa se $\det(B) = 0$, allora esiste $Y \neq 0$ tale che $BY = 0$, si ha: $(AB)Y = A(BY) = A0 = 0$, dunque Y è una soluzione non nulla di $(AB)X = 0$ e quindi $\det(AB) = 0$. Se $\det(A) = 0$ e $\det(B) \neq 0$ allora esiste $Z \neq 0$ tale che $AZ = 0$. Poiché $\det(B) \neq 0$ esiste un'unica $Y \neq 0$ tale che $BY = Z$.
Supponiamo B non singolare, allora consideriamo la funzione $f : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definita da: $f(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$ e dimostriamo che f soddisfa le 1,2,3,4. Si osservi che se A' è la matrice ottenuta da A moltiplicando la riga i-esima per uno scalare non nullo k allora B si ottiene da AB moltiplicando la i-esima riga per lo scalare k e dunque
$f(A') = \frac{\det(A'B)}{\det(B)} = \frac{k\det(AB)}{\det(B)}$. Analogamente se A' è la matrice ottenuta da A scambiando due righe allora $A'B$ è ottenuta da AB scambiando quelle righe e dunque $f(A') = \frac{\det(A'B)}{\det(B)} = \frac{-\det(AB)}{\det(B)} = -f(A)$. Se A' è la matrice ottenuta da A sostituendo alla i-esima riga la combinazione lineare $A_i + kA_j$ allora $A'B$ si ottiene da AB sostituendo alla riga i-esima la combinazione lineare $(AB)_i + k(AB)_j$ e dunque $f(A') = \frac{\det(A'B)}{\det(B)} = \frac{\det(AB)}{\det(B)} =$ $= f(A)$. Infine $f(I) = \frac{\det(IB)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$.

Corollario 1. Sia A una matrice di ordine n invertibile allora:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Corollario 2. (Teorema di Cramer). Sia AX = b un sistema di n equazioni in n incognite con A matrice non singolare. Allora l'unica soluzione del sistema v = $(v_1, \ldots v_n)$ è data da:

$$v_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

dove B_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti.

Dim. Sia X_i la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di I con il vettore v (Av = b) e dunque $\det(X_i) = v_i$. Si ha: $AX_i = B_i$ da cui

$$\det(B_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A)\, v_i$$

Definizione Sia A = (a_{ij}) una matrice di ordine n, si dice **aggiunta di** A la matrice Agg(A) il cui elemento di posto ij è uguale $(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$, essendo A_{ji} il minore relativo all'elemento a_{ji}.

Proposizione 5. . Sia A= (a_{ij}) una matrice di ordine n invertibile allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Agg}(A).$$

Dim. Tesi: $A \cdot \mathrm{Agg}(A) = \det(A) \cdot I$.
Posto: $A \cdot \mathrm{Agg}(A) = (c_{ij})$, si deve quindi dimostrare che

$$c_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } c_{ii} = \det(A).$$

Se $i \neq j$, si ha: $c_{ij} = A_i \mathrm{Agg}(A)^j = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}(-1)^{i+j}\det(A_{jh}) = 0$ poiché c_{ij} è il determinante della matrice con due righe uguali ottenuta da A sostituendo la j-esima riga con la i-esima. Se i = j, $c_{ii} = A_i \mathrm{Agg}(A)^i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}(-1)^{i+j}\det(A_{ih}) = \det(A)$ poiché c_{ii} è il determinante della matrice A calcolato con lo sviluppo di Laplace rispetto alla i-esima riga.

Esempio. Determinare l'inversa della matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sol. Con il metodo dell'aggiunta, si ha: det(A) = -1. Inoltre:

$$\det(A_{11}) = \det\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \ \det(A_{12}) = \det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \ \det(A_{13}) = \det\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\det(A_{21}) = \det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ \det(A_{22}) = \det\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \det(A_{23}) = \det\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\det(A_{31}) = \det\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ \det(A_{32}) = \det\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \det(A_{33}) = \det\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Da cui:

$$\mathrm{Agg}(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

E quindi: $A^{-1} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Con il metodo dei sistemi ($AX = I^j$, allora X è la j-esima colonna di A^{-1}), si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_r \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_r \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim_r \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Definizione. Sia A $\in M_{mn}(\mathbf{R})$, una **sottomatrice di** A **di ordine p** è una matrice A'di ordine p ottenuta dall'intersezione di p righe e p colonne fissate di A.
Esempio: data la matrice:
$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, sono sottomatrici di A di ordine 2 : $B = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (fissando la II e IV riga e la II e III colonna) $C = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ (fissando I e III riga e I e IV colonna); è una sottomatrice di A di ordine 3 : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$(fissando I,III e IV riga e I ,II e IV colonna).
Una sottomatrice di ordine p ottenuta da una sottomatrice A' di ordine (p-1) fissando una ulteriore riga e una ulteriore colonna si dice ottenuta orlando A' (D è ottenuta orlando C).

Teorema (degli orlati). Sia A $\in M_{mn}(\mathbf{R})$, allora il rango di A è uguale a *r* se e solo se esiste una sottomatrice A' di ordine *r* non singolare e tutte le sottomatrici di ordine (*r*+1) ottenute orlando A' hanno determinante uguale a zero.
Dim. La condizione è necessaria perché se la matrice A ha rango *r* allora ha *r* righe e *r* colonne linearmente indipendenti e quindi esiste una sottomatrice A' di ordine *r* non singolare d'altra parte *r* è il massimo numero di righe e colonne indipendenti e pertanto tutte le sottomatrici di ordine (*r*+1) sono singolari. Viceversa se esiste una sottomatrice A' di rango *r* allora esiste un insieme di *r* righe indipendente e un insieme di *r* colonne indipendente. Tali insiemi sono indipendenti massimali per ipotesi e quindi r(A) = *r*.