CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2018-19

Complementi ed Esercizi

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Siano V e W spazi vettoriali su **K** e siano B = $\{e_1,..,e_n\}$ una base di V (dim V= n) e sia C una base di W (dim W = m). La matrice $M^B{}_{B'}$ (T) = A associata ad una applicazione lineare T : V $\rightarrow$ V' rispetto alle basi B e C è la matrice m$\times$n le cui colonne sono rispettivamente le coordinate rispetto alla base C dei vettori $T(e_1),\ldots,T(e_n)$.
Usando la notazione matriciale, se X è la colonna delle coordinate rispetto a B di un vettore v di V si ha:

$$v = (e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BX.$$

Se $A^1,\ldots, A^n$ sono rispettivamente le colonne delle coordinate rispetto a C di $T(e_1),\ldots,T(e_n)$, si ha:

$$T(e_1) = CA^1,\ldots, T(e_n) = CA^n$$

e dunque

$$T(v) = T(x_1e_1 +\ldots+ x_ne_n) = x_1T(e_1) +\ldots+ x_nT(e_n) = x_1CA^1+\ldots+ x_nCA^n =$$
$$= C (x_1 A^1+\ldots+ x_nA^n) = CAX$$

Quindi se X' è la colonna delle coordinate di L(v) rispetto a C, ossia T(v) = CX', si ha: X'= AX.
In particolare ogni matrice A$\in M_{mn}(\mathbf{R})$ determina una applicazione lineare

$$L_A : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{m}} \text{ definita da } L_A(X) = AX.$$

L'immagine di L_A è lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A, mentre il nucleo è costituto dalle soluzioni del sistema omogeneo AX = 0.

ESERCIZIO 1. Sia L : $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, l'applicazione lineare definita da:

$$L(a,b,c) = (c,b+a,c,c).$$

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:
- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}(basi cononiche)
- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B={(0,1,0);(0,0,1);(1,0,0)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}.

L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

ESERCIZIO 2. Sia L: $\mathbf{R}^2 \to M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:

- ✓ $B = \{(1,0);(0,1)\}$; $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
- ✓ $B = \{(1,1);(2,1)\}$; $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
- ✓ $B = \{(1,1);(2,1)\}$; $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ESERCIZIO 3. Sia L **:** $\mathbf{R}_2[x] \to M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi:

$B = \{1+x;\ x+x^2;\ -x^2\}$ e $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esprimere $L(a+bx+cx^2)$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica.
L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

ESERCIZIO 4. Determinare il nucleo e l'immagine delle seguenti applicazioni lineari:

a) L : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, L (x,y,z) = (x+y, x+y, z+x, z+x)

b) L : $\mathbf{M_2(R)} \to \mathbf{M_2(R)}$, $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+z+y \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$

c) L: $\mathbf{M_2(R)} \to \mathbf{R_3[x]}$, $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d + (a+2b+c)x + d\,x^2 + (a+c+2d)x^3)$

PROPOSIZIONE 1. (Isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e lo spazio vettoriale delle matrici). Siano V e W spazi vettoriali su **K** e siano $B = \{e_1,..,e_n\}$ una base di V (dim V= n) e C una base di W (dim W = m). L'applicazione lineare

$$\Phi:\ \mathscr{L}(V,W) \to M_{m,n}(\mathbf{R})$$

definita da: Φ(T) è la matrice associata ad T rispetto alle basi B e C è un isomorfismo. Pertanto la dimensione dello spazio vettoriale $\mathscr{L}(V,W)$ è mn.

Dim.

Per le proprietà delle operazioni tra matrici si ha:

$$\Phi(T_1 + T_2) = \Phi(T_1) + \Phi(T_2),\ \Phi(kT) = k\,\Phi(T).$$

L'applicazione lineare Φ è iniettiva in quanto Ker Φ $=\{\underline{0}\}$, infatti l'unica applicazione lineare che ha per matrice associata la matrice nulla è l'applicazione di costante valore $\underline{0}$. Inoltre Φ è suriettiva in quanto data una matrice A, l'applicazione lineare T che al vettore v = BX di coordinate X associa T(v) = CAX è tale che Φ(T) = A.

□

PROPOSIZIONE 2. Siano V, W, U spazi vettoriali sul campo **K** e B, C, D le rispettive basi. Siano T_1: V→W e T_2: W →U applicazioni lineari. Allora:

$$M^B_D(T_2 \circ T_1) = M^C_D(T_2) \circ M^B_C(T_1)$$

Ossia la matrice associata ad una composta è il prodotto delle matrici associate.

Dim.

Posto $A_1 = M^B_C(T_1)$ e $A_2 = M^C_D(T_2)$, allora se v = BX si ha: $T_1(v) = CA_1X$ e se w= CX' si ha: $T_2(w) = DA_2X'$. Risulta:

1.$(T_2 \circ T_1)(v) = B'' M^B_D (T_2 \circ T_1)X$.

2.$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)) = DA_2(A_1X)$ = (per la proprietà associativa del prodotto) $D(A_2A_1)X$.

Confrontando 1 e 2 ed essendo univocamente determinata la n-pla delle coordinate, si ha $M^B_D(T_2 \circ T_1) = A_2A_1$.

□

COROLLARIO. La matrice associata ad un isomorfismo T: V→ W è invertibile e la sua inversa è la matrice associata ad T^{-1}: W→ V, inversa di T.

ESERCIZIO 5. Determinare le inverse delle matrici $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 6. Determinare una applicazione lineare L: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la cui immagine Im L sia generata dai vettori: (1,2,0-4) e (2,0,-1,-3).

ESERCIZIO 7. Determinare una base dello spazio vettoriale $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$.

Cambiamenti di coordinate.

Sia V uno spazio vettoriale su **K** e siano B e C due basi di V. Allora per ogni vettore v di V si ha: v = BX = CX', dove X è la colonna delle coordinate di v rispetto a B e X' è la colonna delle coordinate di v rispetto a C. Si ha :

$$(2.5.1)\ X' = AX$$

dove A è la matrice associata all'identità rispetto alle basi B e C; tale matrice si dice *matrice di transizione dalla base* C *alla base* B (o matrice del cambiamento di base) e la (2.5.1.) esprime le coordinate X' di un vettore rispetto alla base C in funzione delle sue coordinate rispetto alla base B.

ESERCIZIO 8. Siano B = {(1,0);(0,1)} e C = {(1,3);(2,5)} basi di $\mathbf{R}^2$.

i) Trovare la matrice di transizione dalla base B alla base C.
ii) Trovare la matrice di transizione dalla base C alla base B.

iii) Verificare che le due matrici sono una l'inversa dell'altra.
iv) Determinare la coordinate del vettore (-3,7) rispetto alla base C.

ESERCIZIO 9. Dati i sottoinsiemi di $\mathbf{R_2}[x]$:

$$B = \{1+x+x^2, 1+x, 1\} \text{ e } C = \{1-x,1,1-x^2\},$$

dimostrare che sono basi e determinare la matrice del cambiamento di base da B a C e la matrice del cambiamento di base da C a B. Verificare che sono una l'inversa dell'altra. Determinare le coordinate del vettore $(2+x-2x^2)$ rispetto a B e a C.

ESERCIZIO 10. Siano:

$$B =\{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}, \quad C = \{1, t, \text{sen}3t, \cos3t\},$$

dimostrare che sono insiemi indipendenti.
Sia D l'operatore derivata. Trovare la matrice associata a D considerata come endomorfismo sullo spazio generato da B ed inoltre la matrice associata a D considerata come endomorfismo sullo spazio generato da C.

ESERCIZIO 11. Date le applicazioni lineari

$$L: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_2[x], \quad F: \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^4$$

definite da:

$$L(a,b,c) = c+ (a-c)x + (a+c)x^2, \quad F(a+bx+cx^2) = (c, a+b+c, a)$$

Determinare la matrice associata alla composta F•L rispetto alle basi canoniche.