CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2018-19

Complementi ed Esercizi

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e V' spazi vettoriali sul campo **K**. Una applicazione L: V $\rightarrow$V' si dice *lineare* se:

1_{AL}. L(v+w) = L(v) + L(w), per ogni v e w in V,

2_{AL}. L(k v) = k L(v), per ogni scalare k e ogni vettore v.

Ossia una applicazione lineare è un morfismo di spazi vettoriali sullo stesso campo.

Condizione necessaria e sufficiente affinché L: V $\rightarrow$V'sia lineare è che:

per ogni a,b $\in$ **K** e v,w $\in$ V, L(av+bw) = aL(v) + bL(w).

Tutte le applicazioni lineari hanno le seguenti proprietà:

a) $L(\underline{0}) = \underline{0}$
b) L'immagine del vettore $v = a_1v_1 + \dots + a_tv_t$ è $L(v) = a_1 L(v_1) + \dots a_tL(v_t)$.
c) Se S è un insieme dipendente di V allora L(S) è un insieme dipendente di V', cioè L muta insiemi dipendenti in insiemi dipendenti.
d) Se W è un sottospazio di V allora L(W) è un sottospazio di V', cioè L muta sottospazi in sottospazi.
e) Se W' è un sottospazio di V' allora L^{-1}(W') è un sottospazio di V.

Dim. di a).

L è un morfismo di gruppi e quindi come nel caso dei gruppi: $L(\underline{0}) + L(\underline{0}) = L(\underline{0}+\underline{0}) = L(\underline{0})$ da cui $L(\underline{0}) = \underline{0}$.

Dim. di c).

Dimostriamo che esiste una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo non banale. Poiché per ipotesi S è dipendente, esiste una combinazione lineare $a_1v_1 + \dots + a_tv_t$ di vettori di S con i coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, supponiamo $a_1 \neq 0$. Si ha:

$\underline{0} = L(\underline{0})$ = (per ipotesi) $L(a_1v_1 + \dots + a_tv_t)$ = (per la b) $a_1L(v_1) + \dots + a_tL(v_t)$. Quindi $a_1L(v_1) + \dots + a_t L(v_t) = \underline{0}$, essendo $a_1 \neq 0$, è la combinazione lineare cercata.

Dim. di e).

Siano w, v $\in$ L^{-1}(W') allora L(w), L(v) $\in$W', poiché W' è un sottospazio L(w)+L(v) = L(w+v)$\in$W' e quindi w+v $\in$ L^{-1}(W'). Analogamente kv $\in$ L^{-1}(W').

Per definire una applicazione lineare L basta assegnare i valori che essa assume sui vettori di una base di V, infatti dimostriamo che :

TEOREMA: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e V' uno spazio vettoriale su K. Sia B = $\{v_1,\dots v_n\}$ una base di V e siano $w_1,\dots w_n$ n- vettori di V'. Esiste una sola applicazione lineare L : V → V' tale che

$$L(v_1) = w_1, \dots\dots L(v_n) = w_n$$

Dim.

L'applicazione L : V →V' definita per ogni vettore v di V da:

$$L(v) = x_1w_1 + \dots\dots + x_nw_n ,$$

dove $x_1,\dots,x_n$ sono le coordinate di v rispetto a B, verifica le condizioni richieste. Tale applicazione lineare è unica. Infatti se F : V → V' è una applicazione lineare che associa ai vettori di B rispettivamente $w_1,..,w_n$ allora per ogni v di V risulta:

$F(v) = F(x_1v_1 + \dots\dots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \dots\dots + x_n F(v_n) = x_1w_1 + \dots\dots + x_nw_n = L(v)$.

□

ESERCIZIO 1. Sia L : $\mathbf{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare il valore che l'applicazione assume in un vettore generico (x,y) e in particolare in (-2,3). L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

Ogni applicazione lineare L : V → V' individua due sottospazi :

1. *Il nucleo* Ker L = $\{ v \in V: L(v) = \underline{0} \}$, sottospazio di V,
2. *L'immagine* Im L = $\{ v' \in V' :$ esiste $v \in V$ tale che $L(v) = v'\}$, sottospazio di V'.

Il nucleo è legato alla caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive, mentre l'immagine alla caratterizzazione di quelle suriettive. Infatti risulta:

PROPOSIZIONE 1.

$$\text{L iniettiva} \Leftrightarrow \text{Ker L} = \{\underline{0}\}$$

$$\text{L suriettiva} \Leftrightarrow \dim \text{Im L} = \dim V'$$

Dim.

Sia L iniettiva e sia $v \in$ Ker L allora $L(v) = \underline{0} = L(\underline{0})$ e quindi, essendo L iniettiva, v = $\underline{0}$. Viceversa sia Ker L = $\{\underline{0}\}$, siano v e w vettori di V tali che L(v) = L(w). Si ha:

$\underline{0} = L(v) - L(w) = L(v-w)$

Dunque $(v-w) \in$ Ker L $=\{\underline{0}\}$ e quindi $v-w = \underline{0}$, ossia v = w.

□

Le applicazioni lineari biiettive si dicono *isomorfismi* e due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se è possibile stabilire tra di essi un isomorfismo. La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza nell'insieme degli spazi vettoriali sullo stesso campo.

Ogni applicazione lineare L : V → V' determina (come ogni funzione) una *relazione di equivalenza* ε su V definita da:

$$v\ \varepsilon\ w \text{ se e solo se } L(v) = L(w).$$

ESERCIZIO 2. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $v \varepsilon w$ se e solo se $v-w \in$ Ker L
2. $[\underline{0}]$ = Ker L
3. Per ogni $v \in V$: $[v] = v +$ Ker L
4. Tutte le classi di equivalenza sono in corrispondenza biunivoca.
5. L'insieme quoziente V/ε è isomorfo all'immagine di L.

TEOREMA (di omomorfismo per gli spazi vettoriali) Sia $L:V\rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Allora V/Ker L è uno spazio vettoriale isomorfo a Im L.
Dim. Esercizio.

PROPOSIZIONE 2. Un'applicazione lineare $L : V \rightarrow V'$ è iniettiva se e solo l'immagine L(S) di un insieme indipendente S è indipendente.
Dim.
Sia L un'applicazione lineare iniettiva e sia S un insieme indipendente. Sia:

$$a_1w_1+\ldots+a_tw_t = \underline{0}$$

una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo. Risulta:
$w_1 = L(s_1),\ldots, w_t = L(s_t)$ con $s_1,s_2,\ldots s_t \in S$. Pertanto risulta:

$$\underline{0} = a_1w_1+\ldots+a_tw = a_1 L(s_1)+\ldots+a_t L(s_t) = L(a_1s_1+\ldots+a_ts_t),$$

ossia $(a_1s_1+\ldots+a_ts_t)\in$Ker L e quindi, poiché L è iniettiva, si ha $(a_1s_1+\ldots+a_ts_t) = \underline{0}$.
Essendo S indipendente, ogni combinazione lineare di vettori di S uguale al vettore nullo ha coefficienti tutti nulli e quindi $a_1 =\ldots= a_t = \underline{0}$.
Viceversa se l'immagine di ogni insieme indipendente è un insieme indipendente, l'immagine L(v) di un vettore non nullo v non può essere il vettore nullo e dunque Ker L = $\{\underline{0}\}$.

□

TEOREMA. Uno spazio vettoriale V su un campo **K** è isomorfo allo spazio vettoriale K^n se e solo se la sua dimensione è n.
Dim.
La condizione è evidentemente necessaria perché se due spazi vettoriali sono isomorfi allora l'immagine tramite l'isomorfismo di una base del dominio è una base del codominio e dunque i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. Per dimostrare che la condizione è sufficiente, occorre definire un isomorfismo da K^n in V. A tale scopo, si fissi una base $B = \{v_1,v_2,..,v_n\}$ di V, allora l'applicazione

$$T : \mathbf{K}^n \rightarrow V$$

che ad ogni vettore $(x_1,\ldots,x_n)$ associa il vettore $v = x_1v_1+\ldots +x_nv_n$, ossia il vettore la cui n-pla delle coordinate rispetto a B è $(x_1,\ldots,x_n)$ è un isomorfismo. Infatti T è iniettiva in quanto essendo B una base, l'unico vettore che corrisponde alla n-pla nulla è il vettore nullo. Inoltre T è suriettiva essendo $\langle B \rangle = V$.

□

Dunque per il teorema precedente, si possono studiare proprietà di V in $\mathbf{K}^n$, ad esempio l'indipedenza lineare di un sottoinsieme S di V, fissata una base B di V, può essere provata dimostrando che T(S) è indipendente.

COROLLARIO: Due spazi vettoriali V e V' sullo stesso campo **K** sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

PROPOSIZIONE 3. Sia $L:V\to V'$ un'applicazione lineare. Se V ha dimensione finita *n* sussiste la relazione seguente:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$$

Dim. Se L è iniettiva, ossia $\operatorname{Ker} L = \{\underline{0}\}$, risulta V isomorfo a Im L e quindi $\dim V = 0 + \dim \operatorname{Im} L$. Si supponga dunque $\operatorname{Ker} L \neq \{\underline{0}\}$ e sia $B_K = \{u_1,\ldots,u_t\}$ una base di Ker L e sia $B = B_K \cup \{v_1,\ldots,v_{n-t}\}$ una base di V contenente B_K (cfr. teorema del completamento). L'insieme $\{L(v_1),\ldots,L(v_{n-t})\}$ è una base di Im L. Se $L(v) \in \operatorname{Im} L$, essendo v combinazione lineare dei vettori della base B, si ha:

$$L(v) = L(x_1u_1+\ldots x_tu_t+ y_1v_1+\ldots+ y_{n-t}v_{n-t}) = x_1L(u_1)+\ldots+x_tL(u_t) +y_1L(v_1)+\ldots+y_{n-t}L(v_{n-t})$$
$$= (\text{poiché } L(u_i) = \underline{0})\ \ y_1L(v_1)+\ldots+ y_{n-t} L(v_{n-t}),$$

quindi $<\{L(v_1),\ldots,L(v_{n-t})\}> = \operatorname{Im} L$. Inoltre se $\underline{0} = y_1L(v_1)+\ldots+ y_{n-t}L(v_{n-t}) = L(y_1v_1+\ldots+y_{n-t}v_{n-t})$ allora il vettore $v = y_1v_1+\ldots+ y_{n-t}v_{n-t}$ appartiene a Ker L e quindi può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B_K, ossia $v= y_1v_1+\ldots+ y_{nt}v_{n-t} = x_1u_1+\ldots+x_tu_t$, da cui: $x_1u_1+\ldots,x_t\, u_t-(y_1\, v_1+\ldots+ y_{n-t}\, v_{n-t}) = \underline{0}$ e quindi, poiché B è indipendente, si ha: $x_1= \ldots x_t = y_1 =\ldots= y_{n-t} = 0$. Pertanto essendo $y_1 =\ldots= y_{n-t} = 0$ $\{L(v_1),\ldots,L(v_{n-t})\}$è indipendente.

□

ESERCIZIO 3. Dato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2, i seguenti insiemi sono dipendenti o indipendenti? Quali costituiscono una base?

$$S_1= \{x^2+1, x-1, 1, 2x\};\ S_2 = \{x^2+x+1, x, 2\};\ S_3= \{x+x^2+1, x-1, 1+3x+2x^2\};$$
$$S_4 = \{x^2+x+1, x, \underline{0}\};\ S_5 = \{x^2+1,x-1, -1\};\ S_6 = \{x^2+x+1, x^2, 2\}.$$

Sol. Poiché $\dim \mathbf{R}_2[x] = 3$, S_1 è dipendente; S_2 è indipendente in quanto per ogni v in S_2 si ha $<S_2 -\{v\}> \neq S_2$; S_3 è dipendente in quanto: $-2(x+x^2+1)+ (1+3x+2x^2) = (x-1)$; S_4 è dipendente in quanto contiene il vettore nullo; S_5 e S_6 sono indipendenti per la stessa ragione di S_2.

Data una matrice $A\in M_{m,n}(\mathbf{K})$, si dice *trasposta di* A la matrice A^t che ha per righe le colonne di A, $(A=(a_{ij}), A^t=(a_{ji}))$.

ESERCIZIO 4. Sia $T : M_{m,n}(\mathbf{K})\to M_{n,m}(\mathbf{K})$ definita da $T(A) = A^t$. Dimostrare che T è un isomorfismo.

ESERCIZIO 5. Sia $L : M_2(\mathbf{K})\to M_2(\mathbf{K})$ definita da $L(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ dimostrare che L è lineare e determinare Im L e Ker L.

ESERCIZIO 6. Sia $Tr : M_n(\mathbf{K})\to\mathbf{K}$ l'applicazione *traccia* definita da $Tr(A) = \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ii}$. Dimostrare che Tr è lineare e determinare Im Tr e Ker Tr.

Sol. Infatti:

Tr $((a_{ij})+(b_{ij}))$ = Tr $((a_{ij}+b_{ij}))$ = $\sum_{i=1,\ldots,n}(a_{ii}+b_{ii})$ =$\sum_{i=1,\ldots,n} a_{ii}$+$\sum_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$ =
= Tr $((a_{ij}))$+ Tr$((b_{ij}))$
L'applicazione traccia è suriettiva e dunque Im Tr = **K** e

Ker Tr = {A: $\sum_{i=1,\ldots,n} a_{ii} = 0$}.

ESERCIZIO 7. Si dimostri che i seguenti endomorfismi di $\mathbf{R}^3$ sono isomorfismi e determinarne l'inversa:

i. L(x,y,z) = (x-3y-2z,y-4z,z)
ii. L(x,y,z) = (x+z, x-z,y).

ESERCIZIO 8. Dimostrare che l'insieme L(V,W) delle applicazioni lineari da V in W con le seguenti operazioni è uno spazio vettoriale su K :
(T+F) : V→ W è definita da: (T+F) = T(v)+F(v) per ogni v in V,
(kT) : V→ W è definita da: (kT) (v) = k T(v) per ogni v in V.

ESERCIZIO 9 Dimostrare che se T : V→ W e F : W→ U sono lineari allora la composta F∘T : V→ U è lineare.

PROPOSIZIONE 4. Sia B_V = { $v_1,\ldots,v_n$ } una base di V e sia $B_W = \{w_1,\ldots w_m\}$ una base di W, per ogni coppia (i,j) con i = 1,…n e j = 1,…m, sia E_{ij} : V→ W l'applicazione lineare definita da: $E_{ij}(v_h) = \underline{0}$ se h≠i, $E_{ij}(v_i) = w_j$. Allora l'insieme

{ E_{ij} : V→ W : i=1,…,n e j =1,…,m }

è una base di L(V,W).
Dim. Data la combinazione lineare $\sum_{ij} b_{ij}E_{ij} = \underline{0}$ allora:
per ogni h=1,…n, si ha $\underline{0} = \sum_{ij} b_{ij}E_{ij}(v_h) = \sum_j b_{hj}E_{hj}(v_h) = \sum_j b_{hj}w_j = \underline{0}$
e, poiché_$B_W = \{w_1,\ldots w_m\}$ è una base, risulta $b_{hj} = 0$ per ogni j= 1,…,m. Pertanto i vettori E_{ij} sono indipendenti.
Sia T : V→ W lineare allora posto $T(v_i) = \sum_j b_{ij}w_j$. Risulta $T = \sum_{ij} b_{ij}E_{ij}$, infatti $\sum_{ij} b_{ij}E_{ij}(v_h) = \sum_j b_{hj}w_j = T(v_h)$. Pertanto l'insieme dei vettori E_{ij} genera L(V,W).

Una matrice A ∈ $M_{m,n}(\mathbf{K})$ individua una applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definita da: $L_A(X) = AX$ per ogni $X\in\mathbf{R}^n$. Allora l'immagine di L_A coincide con lo spazio $\langle A^1,\ldots A^n\rangle$ generato dalle colonne di A e dunque la dimensione di ImL_A è uguale al rango per colonne rc(A) della matrice A. Il nucleo di L_A è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo AX = 0 e per la prop. 3 si ha: dim KerL_A = n- rc(A).
Inoltre si ha:
$B \in \mathrm{Im}L_A = \langle A^1,\ldots A^n\rangle \Leftrightarrow \langle A^1,\ldots A^n\rangle = \langle A^1,\ldots A^n,B\rangle \Leftrightarrow$ rcA) =rc(A|B) $\Leftrightarrow L_A^{-1}(B) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ Esiste $X\in\mathbf{R}^n$ tale che AX = B ⇔ Il sistema AX = B è compatibile. Dunque condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema AX = B sia compatibile è che il rango per colonne della matrice dei coefficienti A sia uguale al rango per colonne della matrice completa A|B.