

CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2018-19

Complementi ed Esercizi

1. INSIEMI DIPENDENTI e INSIEMI INDIPENDENTI

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo \mathbf{K} . Un sottoinsieme S di V si dice *dipendente* se esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè si ha: $\underline{0} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dove $v_i \in S$ per ogni $i=1, \dots, n$, ed esiste $i=1, \dots, n$ tale che $a_i \neq 0$.

In caso contrario S si dice *indipendente*, e quindi S si dice indipendente se l'unica combinazione lineare di vettori di S uguale al vettore nullo è quella banale.

Gli insiemi dipendenti sono caratterizzati come segue:

- S è dipendente (cioè per definizione: esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo)
- Esiste $v \in S$ tale che $v \in \text{Span}(S - \{v\})$.
- Esiste un vettore $v \in S$ tale che $\text{Span}(S - \{v\}) = \text{Span } S$

Gli enunciati a), b), c) sono equivalenti.

Dimostrazione a) \Rightarrow b).

Se S è dipendente esiste una combinazione lineare $\underline{0} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dove $v_i \in S$ con almeno uno dei coefficienti non nulli. Supponiamo che sia a_1 allora il vettore $v = v_1 = -(a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) / a_1$ appartiene a $\text{Span}(S - \{v\})$.

Dimostrazione b) \Rightarrow c). banale

Dimostrazione c) \Rightarrow a). Sia $v \in S$ tale che $\text{Span}(S - \{v\}) = \text{Span } S$ allora

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e dunque $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n - v = \underline{0}$ è la combinazione lineare cercata.

ESERCIZIO 1.1. : Dimostrare le seguenti caratterizzazioni degli insiemi indipendenti, ossia dimostrare che a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a):

- Il sottoinsieme S è indipendente.
- Per ogni $v \in S$ si ha $v \notin \text{Span}(S - \{v\})$
- Per ogni vettore v di S si ha che $\text{Span}(S - \{v\})$ è un sottoinsieme proprio di $\text{Span } S$.

OSSERVAZIONI:

1. La dipendenza e l'indipendenza lineare è una proprietà dei vettori che dipende dal campo \mathbf{K} su cui è costruito lo spazio vettoriale. Ad esempio nello spazio vettoriale

$(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo complesso \mathbf{C} , i vettori 1 e i sono dipendenti ($i = 1i$) e quindi l'insieme $\{1, i\}$ è dipendente. Nello spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo reale \mathbf{R} lo stesso insieme è indipendente.

2. Se ad un insieme dipendente S si aggiunge un vettore v , l'insieme $S \cup \{v\}$ è sempre dipendente.

3. (*Proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti*). Sia S un sottoinsieme indipendente. Se v è un vettore risulta:

$$S \cup \{v\} \text{ è dipendente se e soltanto se } v \in \text{Span } S$$

che è equivalente ad affermare:

$$S \cup \{v\} \text{ è indipendente se e solo se } v \notin \text{Span } S$$

ESERCIZIO 1.2. Nello spazio $(\mathbf{R}^4, +, \cdot)$ su \mathbf{R} , siano:

$$v_1 = (1, 2, 0, 3), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (-1, -2, 0, -3), v_4 = (0, 0, 1, -2).$$

- I sottoinsiemi $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ sono dipendenti o indipendenti?
- Il vettore $(1, -1, -4, 5)$ dipende dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4 ?
- L'insieme $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è dipendente?
- Trovare, se esiste, un vettore non appartenente allo spazio generato da S .

ESERCIZIO 1.3. Nello spazio vettoriale delle funzioni $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +, \cdot)$ su \mathbf{R} , dimostrare che l'insieme di funzioni $\{\sin x, \cos x, x\}$ è indipendente.

Sol.

Poiché l'insieme $F = \{\sin x, \cos x\}$ è indipendente (verificarlo!), basta dimostrare che la funzione x non appartiene allo spazio generato da F . Infatti se fosse:

$$a \sin x + b \cos x = x \text{ per ogni } x,$$

per $x = 0$ si avrebbe: $a \sin 0 + b \cos 0 = b = 0$ e per $x = \pi/2$: $a \sin \pi/2 + \cos \pi/2 = a = \pi/2$. Ma la funzione $\pi/2 \sin x$ è diversa dalla funzione x , essendo ad esempio $\pi/2 \sin \pi/3 \neq \pi/3$.

ESERCIZIO 1.4. Sia W_k il sottospazio di \mathbf{R}^3 generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (2, k, 1)$.

- Determinare per quali valori di k l'insieme $\{w_1, w_2\}$ è indipendente,
- determinare per quali valori di k il vettore $v = (-2, 1, k)$ appartiene a W_k ,
- determinare un sottoinsieme G contenente w_1 e w_2 tale che $\text{Span } G = \mathbf{R}^3$.
- determinare un sottospazio U tale che $W_k + U$ sia diretta,
- determinare un sottospazio di W_k non banale.

2. BASI

Una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo K è un sottoinsieme B di V tale che:

1_B B è linearmente indipendente.

2_B $\text{Span } B = V$.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti e caratterizzano le basi:

- a) B è una base.
- b) B è un insieme di generatori minimale, in altre parole non esiste un insieme di generatori dello spazio contenuto propriamente in B .
- c) B è un insieme indipendente massimale, ossia non esiste un insieme indipendente contenente propriamente B .

Dim.

a) \Rightarrow b).

Sia S un insieme contenuto in B propriamente, allora esiste un vettore w tale che $w \in B$ e $w \notin S$. Essendo B indipendente, anche $S \cup \{w\}$ è indipendente essendo un sottoinsieme di B , dunque w non appartiene allo spazio generato da S e pertanto $\text{Span } S \neq V$.

b) \Rightarrow c).

B è indipendente, infatti per ogni $w \in B$ si ha $\langle B \cup \{w\} \rangle \neq V$, essendo B un sistema di generatori minimale. Rimane da dimostrare che se S è un insieme contenente B allora S è dipendente. Sia w un vettore tale che $w \in S$ e $w \notin B$, allora si ha $V = \langle B \rangle \subseteq \langle S - \{w\} \rangle \subseteq \langle S \rangle = V$ e dunque S è dipendente.

c) \Rightarrow a).

Essendo B indipendente massimale, si ha $\text{Span } B = V$. Infatti dato un qualunque vettore $v \notin B$ l'insieme $B \cup \{v\}$ è dipendente e dunque v appartiene allo spazio generato da B .

PROPOSIZIONE. B è una base se e solo se ogni vettore v può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di B , cioè se $v = \sum_{w \in B} x_w w = \sum_{w \in B} y_w w$ allora $x_w = y_w$ per ogni $w \in B$. I coefficienti della combinazione si dicono *coordinate di* v rispetto alla base B .

Bisogna tener presente i seguenti fatti.

- Ogni spazio vettoriale ha una base e tra due basi di uno stesso spazio si può sempre definire una corrispondenza biunivoca.
- Se una base di uno spazio vettoriale è formata da n vettori allora ogni altra base ha n vettori, in tal caso lo spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* n .
- Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione infinita* quando le sue basi hanno infiniti elementi.
- La dimensione dipende dal campo su cui è definito lo spazio vettoriale. Ad esempio lo spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo complesso \mathbf{C} ha dimensione 1, mentre sul campo reale \mathbf{R} ha dimensione 2 essendo $\{1, i\}$ una sua base.
- Sia $\dim V = n$, allora :

- ✓ un insieme indipendente con n vettori è una base, altrimenti esisterebbe un insieme indipendente massimale e quindi una base, con un numero di elementi maggiore di n .
- ✓ $(n+1)$ vettori costituiscono un insieme dipendente.
- ✓ un sistema di n generatori di V è una base, altrimenti esisterebbe un insieme minimale di generatori di V e quindi una base, con un numero di elementi minore di n .
- ✓ se W è un sottospazio di V , $\dim W \leq n$.

TEOREMA (del completamento). Dato un insieme indipendente S di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ con $\dim V = n$, è possibile determinare un insieme H vettori tale che $S \cup H$ sia una base di V e dunque $|H| = (n - |S|)$.

Dim.

Sia S un insieme indipendente con $|S| = t$ e sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V . Se il sottospazio $\langle S \rangle$ coincide con V allora S è una base di V e dunque $|S| = n$. Altrimenti esiste un vettore v_1 di B tale che $v_1 \notin \langle S \rangle$, pertanto $S \cup \{v_1\}$ è indipendente. Se $\langle S \cup \{v_1\} \rangle = V$ allora $H = \{v_1\}$ e $|S \cup \{v_1\}| = n$, altrimenti esiste un vettore di B $v_2 \notin \langle S \cup \{v_1\} \rangle$ e dunque $S \cup \{v_1, v_2\}$ è indipendente, se $\langle S \cup \{v_1, v_2\} \rangle = V$ allora $H = \{v_1, v_2\}$ e $t = n - 2$. Se $\langle S \cup \{v_1, v_2\} \rangle \neq V$, iterando il ragionamento, è possibile determinare un sottoinsieme $H = \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ di B tale che $B_S = S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ sia indipendente e $\langle S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\} \rangle = V$, in quanto almeno un vettore di B deve appartenere allo spazio generato da $\langle S \rangle$. L'insieme $S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ è una base di V contenente S .

TEOREMA (dell'estrazione). Dato un sistema G di generatori di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ con $\dim V = n$, è possibile determinare un sottoinsieme di G che sia una base di V .

ESERCIZIO. Dimostrare il teorema dell'estrazione.

ESEMPIO. Dato il vettore $w = (2, 1, 2, 1)$ di \mathbf{R}^4 , determinare una base che contenga w . Determinare inoltre le coordinate del vettore $(3, 0, 3, 1)$ rispetto a questa base.

Sol.

Si consideri la base canonica $B_c = \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$ di \mathbf{R}^4 , per il teorema del completamento, è possibile aggiungere all'insieme $\{w\}$ tre vettori di B_c in modo da ottenere una base di \mathbf{R}^4 . Il vettore $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ non appartiene allo spazio generato da w e dunque $\{w, e_1\}$ è indipendente. Un vettore appartenente a $\langle \{w, e_1\} \rangle$ è del tipo $(2a+b, a, 2a, a)$ e dunque il vettore $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ non appartiene a $\langle \{w, e_1\} \rangle$ e pertanto l'insieme $\{w, e_1, e_2\}$ è indipendente. Un vettore appartenente a $\langle \{w, e_1, e_2\} \rangle$ è del tipo $(2a+b, a+c, 2a+d, a)$ e dunque il vettore $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ non appartiene allo spazio $\langle \{w, e_1, e_2\} \rangle$. Pertanto la base richiesta è $B = \{w, e_1, e_2, e_3\}$. Le coordinate del vettore $(3, 0, 3, 1)$ si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + c = 0 \\ 2a + d = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

La quaterna delle coordinate di w rispetto a B è $(1,1,-1,1)$.

PROPOSIZIONE. Dati due sottospazi W e U di uno spazio vettoriale di dimensione n , si ha:

$$\dim U + \dim W = \dim (U+W) + \dim (U \cap W) \text{ (formula di Grassmann).}$$

Dim.

Se $(U \cap W) = \{0\}$ è ovvio. Sia $(U \cap W) \neq \{0\}$, fissata una base $B = \{e_1, \dots, e_t\}$ di $(U \cap W)$, per il teorema del completamento è possibile determinare un insieme di vettori di U : $S_U = \{u_{t+1}, \dots, u_{t+r}\}$ e un insieme di vettori di W : $S_W = \{w_{t+1}, \dots, w_{t+s}\}$ in modo che $B \cup S_U$ sia una base di U e $B \cup S_W$ sia una base di W . Allora per provare la formula basta dimostrare che l'insieme $B_+ = (B \cup S_U \cup S_W)$ è una base di $(U+W)$. È ovvio che $\langle B_+ \rangle = (U+W)$, inoltre B_+ è indipendente. Infatti sia:

$$a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r} + b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s} = 0$$

una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo. Allora il vettore

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r} = - (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s})$$

appartiene all'intersezione $(U \cap W)$ e dunque può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B , per cui si ha:

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_t e_t = - (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s})$$

da cui: $c_1 e_1 + \dots + c_t e_t + (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s}) = 0$, ma l'insieme $\{e_1, \dots, e_t, w_{t+1}, \dots, w_{t+s}\}$ è una base di W e dunque per la caratterizzazione c) si ha $c_1 = \dots = c_t = b_1 = \dots = b_s = 0$.

Pertanto v è il vettore nullo, ossia $0 = a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r}$ ma essendo l'insieme $\{e_1, \dots, e_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+r}\}$ una base di U deve risultare $a_1 = \dots = a_{t+r} = 0$. Si è dunque dimostrato che una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo è necessariamente quella con i coefficienti tutti uguali a zero e quindi B_+ è indipendente. □

ESERCIZIO 2.1. Dati i seguenti sottospazi di \mathbf{R}^3 :

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0 \}, W = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = 0 \}, T = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x=y=z \}$$

Determinare la dimensione di $U+W$, $U+T$, $T+W$.

Sol.

$$\text{Risulta : } U \cap T = \{ \underline{0} \}, W \cap T = \{ \underline{0} \}, U \cap W = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = z = 0 \}$$

Una base di U è $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$, una base di W è $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ e una di T è $\{(1,1,1)\}$

Pertanto:

$$\dim U + \dim W = 2 + 2 = \dim (U \cap W) + \dim (U+W) = 1 + \dim (U+W), \text{ da cui } \dim(U+W) = 3 \text{ e quindi } U+W = \mathbf{R}^3.$$

$$\dim U + \dim T = 2 + 1 = \dim (U \cap T) + \dim (U+T) = 0 + \dim(U+T), \text{ da cui } (U+T) = \mathbf{R}^3.$$

$\dim W + \dim T = 2 + 1 = \dim (W \cap T) + \dim (W+T) = 0 + \dim(W+T)$ da cui $(W+T) = \mathbf{R}^3$

ESERCIZIO 2.2. Dato l'insieme $S = \{(1,2,1,1), (-1,-2,3,2)\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B di \mathbf{R}^4 contenente S .

ESERCIZIO 2.3. Dato l'insieme $S = \{(1+x^2), (2+x-2x^2+2x^3)\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 3 contenente S .

ESERCIZIO 2.4. Si determini una base e quindi la dimensione dei seguenti sottospazi di \mathbf{R}^4 :

$U_1 = \{(a,b,c,d) : a-c+d = 0\}$, $U_2 = \{(a,b,c,d) : a+d = 0, b = 2c\}$, $U_3 = \{(a,b,c,d) : a+2b=0\}$, $U_4 = \{(a,b,c,d) : a = 0, b+d = 0, b+c = d\}$, $U_5 = \{(a,b,c,d) : 2a-c+d = 0, c = b\}$.

ESERCIZIO 2.5. Dato lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ delle matrici 2×3 sui razionali, determinare una base B dello spazio generato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ contenete la base B trovata.

ESERCIZIO 2.6. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbf{K})$ delle matrici quadrate a coefficienti nel campo \mathbf{K} . Data una matrice $A = (a_{ij})$ si definisce traccia di A l'elemento $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{A \in M_n(\mathbf{K}) : \text{tr}(A) = 0\}$$

è un sottospazio e determinarne la dimensione.

ESERCIZIO 2.7. Dimostrare che l'insieme: $B = \{-1-x-x^2; 1-x, 1\}$

è una base dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 . Determinare le coordinate rispetto a B dei seguenti vettori: $x; -3+x+2x^2; x+x^2; 2; 1+x^2, 2x^2$.