CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2018-19

Complementi ed Esercizi

Spazi Vettoriali

SPAZI VETTORIALI: prime proprietà.

DEFINIZIONE 1. *Uno spazio vettoriale sul campo* **K** è una struttura algebrica $(V,+,\cdot)$, dove $\cdot$ è una operazione esterna $\cdot : \mathbf{K} \times V \to V$, tale che:

1. $(V,+)$ è un gruppo abeliano.
2. Per ogni $k \in \mathbf{K}$, $v,w \in V$: $k(v+w) = kv+kw$ (distributiva rispetto alla somma vettoriale).
3. Per ogni $k, h \in \mathbf{K}$, $v \in V$: $(k+h)v = kv+hv$ (distributiva rispetto alla somma di scalari).
4. Per ogni $k,h \in \mathbf{K}$, $v \in V$: $(kh)v = k(hv) = h(kv)$.
5. Per ogni $v \in V$: $1v = v$

Gli elementi del campo si chiamano *scalari*.

In uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo **K**, il vettore nullo è necessariamente unico e per ogni vettore è anche unico il suo opposto. Inoltre si ha:

1. Per ogni vettore v : $0\,v = \underline{0}$
2. Per ogni scalare k : $k\,\underline{0} = \underline{0}$
3. Per ogni vettore v e per ogni scalare k : $k(-v) = -kv = (-k)v$
4. $k\,v = \underline{0} \Leftrightarrow k = 0$ oppure $v = \underline{0}$.

Dim.1.

Risulta: $0v = (0+0)v =$ (distributiva) $0v + 0v$. Poiché ogni vettore ha un opposto, dalla uguaglianza precedente sommando ad entrambi i termini $-0v$ si ricava.

$\underline{0} = 0v-0v = (0v + 0v)-0v = 0v+(0v-0v) = 0v + \underline{0} = 0v$

Dim. 3

$k(-v) + k\,v = k\,(v-v) = k\,\underline{0} = \underline{0}$ dunque $k(-v)$ è l'opposto di kv e cioè $k(-v) = -kv$

$(-k)v + kv = (k-k)\,v = 0v = \underline{0}$, cioè $(-k)\,v = -kv$

□

ESERCIZIO 1. Dimostrare che le seguenti strutture algebriche, dove + e $\cdot$ indicano rispettivamente le operazioni naturali di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali su **R**: $(M_{m,n}(\mathbf{R}), +,\cdot)$, $(\mathbf{R}^n, +,\cdot)$, $(\mathbf{R}[x],+,\cdot)$, $(\mathbf{R}^X,+,\cdot)$ con X insieme non vuoto.

DEFINIZIONE 2. Il vettore v si dice *combinazione lineare dei vettori* $v_1,\dots v_n$ se esistono n scalari $a_1,\dots a_n$ tali che $v = a_1v_1+\dots+a_nv_n$.*CNES affinché un sottoinsieme* W *non vuoto di uno spazio vettoriale* V *sia un sottospazio è*:
per ogni $a,b\in \mathbf{K}$ *e per ogni* $w,u \in W$ *allora* $aw+bu \in W$.

ESERCIZIO 2. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sono sottospazi ?

$A = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1/2) = 0\}$
$B = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(x) \text{ è pari per ogni } x\}$
$C = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1)\}$
$D = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1) = 0\}$
$E = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1)^2\}$
$F = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(2) - 3f(1) = 0\}$

Il sottoinsieme $\sum(S)$ *costituito da tutte le combinazioni lineari di elementi di* S *è un sottospazio.*

L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio, *l'unione di due sottospazi* W *e* U *è un sottospazio se e solo se* $W \subseteq U$ *oppure* $U \subseteq W$.

Dim.

Supponiamo che $W \cup U$ sia un sottospazio. Si deve quindi dimostrare che se W non è un sottoinsieme di U allora necessariamente U deve essere un sottoinsieme di W. Infatti sia $u \in U$. Poiché W non è contenuto in U, esiste un vettore w di W non appartenente ad U. Si ha $u, w\in W \cup U$ e quindi essendo l'unione un sottospazio il vettore $u + w\in W \cup U$. Il vettore $v = u + w$ non può appartenere ad U (altrimenti $v-u = w \in U$) e quindi appartiene a W, per cui $u = v-w \in W$. Si è dunque dimostrato che ogni vettore u di U appartiene anche a W , cioè $U \subseteq W$.

Ovviamente se $W \subseteq U$, si ha $W \cup U = U$ e quindi l'unione è un sottospazio.

□

DEFINIZIONE 3. *Il sottospazio* <S> *generato dal sottoinsieme S* è l'intersezione di tutti i sottospazi contenenti S.

Il sottospazio <S> *generato dal sottoinsieme S è uguale* $\sum(S)$.

ESERCIZIO 3. Dimostrare che la *somma* (U + W) *di due sottospazi* U e W definita da:

$$(U + W)=\{ v \in V : v = u + w \text{ con } u \in U \text{ e } w \in W\}$$

è uguale al sottospazio $<(U \cup W)>$ generato da $(U \cup W)$.

La somma (U + W) *si dice diretta, e si indica con* $(U \oplus W)$, *se per ogni vettore* v *di* (U + W) *esiste un solo vettore* u *in* U *e un solo vettore* w *in* W *tale che* :

$$v = u + w.$$

In altre parole la somma si dice diretta se, per ogni vettore v di U +W, l'identità :

$v = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. implica $u = u'$ e $w = w'$.

La somma di due sottospazi $(U + W)$ *è diretta se e solo se* $U \cap W = \{ \underline{0} \}$

Dim.

Supponiamo che la somma sia diretta. Sia $v \in U \cap W$, se v non fosse il vettore nullo $v = v + 0$ e $v = 0 + v$ sarebbero due modi di scrivere v come somma di un vettore di U e uno di W. Supponiamo viceversa $U \cap W = \{ \underline{0} \}$ e sia $v = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. Il vettore $u - u' = w' - w \in U \cap W$ e quindi $u - u' = w' - w = \underline{0}$, cioè $u = u'$ e $w = w'$.

□

ESEMPIO. Sia $(M_n(\mathbf{R}), +, \cdot)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n.

Data una matrica $A = (a_{ij})$ si dice *trasposta di* A, e si indica con A^t, la matrice le cui righe sono le colonne di A, cioè $A^t = (a_{ji})$. Risulta:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \text{ e } (kA)^t = kA^t$$

Una matrice $A = (a_{ij})$ dice *simmetrica* se $A = A^t$ e si dice *antisimmetrica* se $A = -A^t$.

L'insieme U delle matrici simmetriche e l'insieme W delle matrici antisimmetriche sono sottospazi di $M_{nn}(\mathbf{R})$ (dimostrarlo !) e si ha :

$$M_{nn}(\mathbf{R}) = U \oplus W \text{ (dimostrarlo!)}$$

DEFINIZIONE 4. Due sottospazi tali che $U \oplus W = V$ si dicono *supplementari*.

L'insieme $\mathscr{S}(V)$ *dei sottospazi di* V *è un reticolo rispetto all'inclusione dove*:

$$W \vee U = W + U \quad \text{e } W \wedge U = W \cap U.$$

ESERCIZIO 3.

Dati i sottospazi T, U, W di uno spazio vettoriale, dimostrare che, se T è un sottoinsieme di W, allora:

$$T + (U \cap W) = (T + U) \cap W$$

Dim.

Sia v un vettore di $T + (U \cap W)$, allora $v = t + v'$ dove $t \in T$ e $v' \in U \cap W$. Quindi si ha: $v = t + v'$ con $t \in T$ e $v' \in U$, cioè $v \in T + U$. Inoltre v è la somma di due vettori di W ($t \in T \subseteq W$ per ipotesi e $v' \in W$) e quindi v è un vettore di W. Pertanto $v \in (T+U) \cap W$. Analogamente si dimostra che

$$(T+U) \cap W \subseteq T + (U \cap W)$$

□

ESERCIZIO 4. Dimostrare che il reticolo $(\mathscr{S}(V), \subseteq)$ non è distributivo.

ESERCIZIO 5. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo **K** dimostrare che l'insieme dei sottospazi di V con la relazione di inclusione è un reticolo.

ESERCIZIO 6. Per ogni spazio vettoriale elencato nell'esercizio1, determinare due sottospazi la cui somma è diretta ed è uguale a tutto lo spazio vettoriale.

ESERCIZIO 7. Si consideri il sottoinsieme S = {(2,0,0); (0,-3,0)} dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$. Si determini <S> e si dimostri che il vettore (5,-2,0) ne è un elemento.

ESERCIZIO 8. Per ciascuno dei sottoinsiemi seguenti si stabilisca se è un sottospazio di $(\mathbf{Z}_7)^4$:

$W_1 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c+d = 0\}$

$W_2 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c = 0\}$

$W_3 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b = 0\}$

$W_4 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a= 0\}$

$W_5 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d\}$

$W_6 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d +1\}$

ESERCIZIO 9. Dati i sottoinsiemi :

$$W = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : b = 0\} \text{ e } U = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : a + d = 0\}$$

Dimostrare che sono sottospazi di $\mathbf{R}^4$ e determinare $W \vee U$ e $W \wedge U$.

ESERCIZIO 10. Determinare uno spazio supplementare del sottospazio W quando:

$W =\{ (a,b,c,) \in \mathbf{R}^3 : a+b+c = 0\}$

$W =\{ (a,b,c,) \in \mathbf{R}^3 : a+b = 0, a-d=0\}$

$W =\{ p(x) \in \mathbf{R}[x]$: grado di $p(x) \leq 3\}$

$W =\{a+bx+cx^2+ dx^3 \in \mathbf{R}_3[x] : a+b=0 \ c+d=0\}$

$W =\{ p(x) \in \mathbf{R}[x]: p(x) = p(-x)\}$.

ESERCIZIO 11. Sia X un insieme e P(X) l'insieme delle sue parti. La differenza simmetrica di due sottoinsiemi A e B di X è il sottoinsieme:

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \text{ , (cfr. Scheda 1)}$$

ossia $A \,\Delta\, B$ contiene gli elementi che stanno in A o in B, ma non nella loro intersezione.

Dimostrare che P(X) è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{Z}_2$ rispetto alla operazione Δ e alla operazione di prodotto per uno scalare definita da:

$$0 A = \emptyset, \ 1A = A$$

Quali sono i sottospazi di questo spazio vettoriale?