

Corso di Laurea in Informatica - AA 2018-19

ALGEBRA

Appello straordinario - Prova scritta

25 ottobre 2019

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi. Il compito deve essere consegnato ordinato e leggibile in caso contrario non sarà valutato.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare l'insieme H di tutte le permutazioni di S_6 che commutano con la trasposizione $\tau = (12)$ e la sua cardinalità. H è un sottogruppo di S_6 ? Motivare la risposta.

ESERCIZIO 1.2. Risolvere il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 6x \equiv 9 \pmod{21} \\ 15x \equiv 10 \pmod{25} \end{cases}$$

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Sia $\mathbf{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale su \mathbf{R} dei polinomi nell'indeterminata x di grado $\leq n$. Sia $F: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_2[x]$ l'applicazione definita da:

$$F(p(x)) = p(x+1) - p(x-1) - p(1) \text{ per ogni polinomio } p(x) \text{ in } \mathbf{R}_3[x].$$

- i) Dimostrare che F è lineare.
- ii) Determinare una base di $\text{Ker } F$ e una di $\text{Im } F$.
- iii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche.

ESERCIZIO 2.2. Sia T l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

- i) Gli autovalori di T e una base per ogni autospazio
- ii) Una matrice diagonale D e una matrice P tale che $A = P D P^{-1}$