Corso di Laurea in Informatica - AA 2018-19

ALGEBRA

Sessione invernale - I Appello- Prova scritta

11 gennaio 2019

Antonietta Venezia (Canale M-Z)

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi. Il compito deve essere consegnato ordinato e leggibile in caso contrario non sarà valutato.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Dati i numeri m = 7007 e n = 1991, determinare :

a) il MCD(7007, 1991) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) le soluzioni, se possibile, dell'equazione in $\mathbf{Z}_{7007}$: 1991x = 44.

ESERCIZIO 1.2. Sia U(n) il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbf{Z}_n$. Dati i gruppi: U(7), U(14), U(15), U(18), determinare:

a) quali sono isomorfi tra loro definendo esplicitamente un isomorfismo,
b) quali sono quelli isomorfi al gruppo $(\mathbf{Z}_6,+)$ motivando la risposta.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Sia

$$W = \{(a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbf{R}_3[x] \ : a+d = 0 \text{ e } a-b+2c = 0\}.$$

a) Dimostrare che W è un sottospazio.
b) Determinare una base di W e quindi la sua dimensione.
c) Determinare un sottospazio U tale che $W+U = \mathbf{R}_3[x]$ e $W \cap U = \{\underline{0}\}$.
d) Il suddetto sottospazio U è unico?

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(1,0,0) = (1,-2,-2); \ L(1,1,0) = (1,3,-2); \ L(0,0,1) = (0,0,5).$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L possa essere rappresentata da una matrice diagonale D ed in tal caso trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.