

ALGEBRA (M-Z)

(a.a. 2018-19)

SCHEDA 1: Concetti fondamentali

Insiemi: descrizione e rappresentazione, elementi e appartenenza. Sottoinsiemi, insieme vuoto. Unione, intersezione, complemento. Prodotto cartesiano. Relazioni.

1. *Si assegna un insieme quando: a) si elencano i suoi elementi, b) si definisce una proprietà.*

1.1. Per gli insiemi seguenti si riconosca come sono definiti:

- Insieme degli articoli della lingua italiana.
- $\{1,3,6,10,15,21,28,\dots\}$
- $\{x \in \mathbf{N}: \exists z \text{ tale che } x = z-3 \}$
- Insieme delle regioni italiane.
- $\{1,5,12,22,35,51,\dots\}$
- $\{x \in \mathbf{N}: x-1 \text{ è pari}\}$
- Insieme delle ossa del cingolo pelvico.
- $\{x \in \mathbf{N}: x = x^2\}$
- $\{1,2,3,5,8,13,21,3,\dots\}$
- $\{x \in \mathbf{N}: \exists z \in \mathbf{N} \text{ tale che } x = 2z+1 \}$
- $\{5,7,9,11,13,15\}$,
- Insieme dei numeri primi, pari e diversi da 2.
- $\{\text{Parco Colle Oppio, Parco Egerio, Parco S'Andrea, Parco San Gregorio, Parco San Sebastiano, Parco degli Scipioni}\}$
- $\{1,4,9,16,25,\dots,n^2,\dots\}$
- $\{x \in \mathbf{N}: x^2+x=1\}$
- Insieme dei multipli di 3 compresi tra 10 e 22.
- $\{x \in \mathbf{N}: \forall z \text{ si ha } x+z = z\}$
- L'insieme dei numeri dispari,
- $\{x \in \mathbf{N}: \exists z \in \mathbf{N} \text{ tale che } z = 2x\}$

1.2. Si definiscano con una proprietà quelli tra gli insiemi precedenti dei quali si sono elencati gli elementi.

2. Sottoinsiemi, unione, intersezione. Uguaglianze.

2.1. Dati gli insiemi $X = \{a,c,d\}$, $Y = \{a,b,d,e\}$, $Z = \{a,b\}$ quali delle seguenti espressioni sono corrette?

$$Z \in Y$$

$$X \subset Y$$

$$a \in Z$$

$$a \subset X$$

$$(X \cup Z) \subset Y$$

$$\begin{aligned}
X \cap Z &\in Y \\
Z &\subseteq Y \\
X \cap Z &= a \\
Z &\subseteq Y
\end{aligned}$$

2.2 . Dati gli insiemi:

$A = \{x \in \mathbf{Z}: x \geq 18, \text{ la divisione di } x \text{ per } 4 \text{ ha resto } 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z}: \exists n \in \mathbf{Z} \text{ tale che } (x-18) = 4n\}$, dimostrare che $A=B$.

2.3. Si dimostri che $B \cup C = \emptyset$ se e solo se $B = \emptyset$ e $C = \emptyset$.

2.4. Sia B un sottoinsieme di X . Si dimostri che se $A \cup B = A$ per ogni sottoinsieme A allora $B = \emptyset$.

2.5. Dimostrare che la legge di cancellazione è falsa. Ossia se $A \cup B = A \cup C$ non necessariamente si ha $B = C$.

2.6. Dimostrare che l'unione $(A \cup B)$ di due sottoinsiemi di X è contenuta in tutti i sottoinsiemi di X contenenti sia A che B , mentre l'intersezione $(A \cap B)$ contiene tutti i sottoinsiemi di X contenuti sia in A che in B .

2.7. $(A \cup B) \cap C$ è uguale ad $A \cup (B \cap C)$?

2.8. Siano X ed Y due insiemi tali che esiste un insieme Z per cui $X \cap Z = Y \cap Z$ e $X \cup Z = Y \cup Z$, dimostrare che necessariamente $X = Y$.

2.9. Si considerino l'insieme A degli interi divisibili per 3, l'insieme B degli interi divisibili per 5, l'insieme C degli interi divisibili per 20. Determinare $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $(A \cap B) \cup C$ e $(A \cup B) \cap C$.

3. Differenza.

Dato un insieme I e un sottoinsieme \mathcal{A} di I , il complementare di \mathcal{A} è l'insieme:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{x \in I: x \notin \mathcal{A}\}.$$

3.1. Dimostrare che: $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ e $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ (De Morgan)

3.2. Dimostrare che $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

3.3. Differenza simmetrica Δ si definisce come segue: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Dimostrare che

$$(A \Delta B) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

3.4. Verificare che la differenza simmetrica è associativa, commutativa e soddisfa la proprietà distributiva rispetto all'intersezione ma non rispetto all'unione.

3.5. Definire una operazione analoga alla differenza simmetrica (ossia associativa e commutativa) che sia distributiva rispetto all'unione ma non rispetto all'intersezione.

3.6. Dimostrare che $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$ se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

3.7. Si dimostri che $A \subseteq B$ è equivalente ad ognuna delle seguenti condizioni:

i) $A \Delta B = B - A$,

ii) se A e B sono sottoinsiemi di X , $\bar{A} \cup B = X$.

3.8. Calcolare:

- $\overline{A \cap \bar{B}} \cup (B \cap C)$
- $\overline{(A \cap B) \cup C} \cap \bar{B}$
- $((A \cup B) \cap \bar{A}) \cup \overline{B \cap A}$

4. Prodotto cartesiano

4.1. E' vera l'identità $(A \times A) \times A = A \times (A \times A)$? Ogni sottoinsieme di un prodotto cartesiano è un insieme prodotto?

4.2. Dei seguenti insiemi determinare quelli prodotto e indicarne i "fattori":

$\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,1)\}$, l'insieme dei punti della superficie di un cilindro, l'insieme dei punti della superficie di una piramide a base quadrata.

4.3. Verificare le seguenti identità:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

5. Relazioni, relazioni duali, relazioni d'ordine e di equivalenza.

Una relazione ρ tra gli insiemi \mathcal{A} e \mathcal{B} è una terna $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}_\rho)$ dove \mathcal{R}_ρ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (grafico della relazione).

5.1. Si rappresenti graficamente la relazione $x^2 + y^2 = 5$ tra numeri reali e la relazione $x^2 + y^2 = 5$ tra numeri interi.

5.2. Determinare una coppia di relazioni che siano la prima inclusa nella seconda.

5.3. Siano $A = \{\text{Lazio, Liguria, Puglia, Toscana, Sicilia, Sardegna}\}$ e

$B = \{\text{Carbonia, Cesano, Imperia, Manfredonia, Narni, Orvieto, Parma, Piombino, Veroli}\}$, rappresentare graficamente la relazione "La città x appartiene alla regione y ".

5.4. Rappresentare graficamente le relazioni R tra numeri reali definite da:

- $(x, y) \in R$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1/2$ e $1 < y < 2$
- $(x, y) \in R$ se e solo se $y = x^2$
- $(x, y) \in R$ se e solo se $x > y$
- $(x, y) \in R$ se e solo se $1 \leq y \leq x$

5.5. Quando una relazione non è riflessiva? Quando non è simmetrica? Quando non è antisimmetrica? Quando non è transitiva?

Data una relazione ρ tra \mathcal{A} e \mathcal{B} , la relazione duale (o inversa) di ρ è la relazione ρ^* tra \mathcal{B} e \mathcal{A} definita da: $b \rho^* a \Leftrightarrow a \rho b$.

5.6. Sia $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, definire ρ^* essendo ρ la relazione su X definita da:

5.6.1. $x \rho y$ se e solo se $y = 2x$

5.6.2. $x \rho y$ se e solo se $y = 3x - 3$

5.6.3. $x \rho y$ se e solo se $y - x = 1$

Un insieme parzialmente ordinato è una coppia (\mathcal{P}, \leq) dove \mathcal{P} è un insieme non vuoto e \leq è una relazione d'ordine su \mathcal{P} (ossia una relazione riflessiva, antisimmetrica transitiva).

5.7. Posto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, si rappresenti il diagramma di Hasse di $(A, |)$ e dell'insieme parzialmente ordinato duale.

5.8. Si consideri l'insieme $B = \{n \in \mathbf{N} : n = 2^r 3^s \text{ con } r, s \in \mathbf{N}\}$. Dimostrare che la relazione ρ su B definita da:

$$(2^r 3^s \rho 2^t 3^u) \Leftrightarrow (r \leq t \text{ e } s \leq u)$$

è una relazione d'ordine. Considerati i sottoinsiemi di B : $F = \{2, 4, 12, 16\}$ e $G = \{3, 16, 27, 32\}$. Si rappresentino i diagrammi di Hasse degli insiemi parzialmente ordinati (F, ρ) e (G, ρ) .

5.9. Determinare una relazione riflessiva e antisimmetrica ma non transitiva.

5.10. Determinare una relazione antisimmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Una partizione di \mathcal{A} è un insieme di sottoinsiemi di \mathcal{A} non vuoti, chiamati blocchi tale che ogni elemento di \mathcal{A} appartiene ad un sol blocco.

5.11. Dato un insieme A , sia $\Pi(A)$ l'insieme delle partizioni di A , dimostrare che la relazione su $\Pi(A)$ definita da:

$$\pi \leq \sigma \Leftrightarrow \text{ogni blocco di } \pi \text{ è contenuto in un blocco di } \sigma$$

è una relazione d'ordine. Rappresentare il diagramma di Hasse di $(\Pi(A), \leq)$ con $A = \{1, 2, 3\}$.

5.12. Provare che se $\{B_i : i \in I\}$ è una partizione dell'insieme X e $\{C_j : j \in J\}$ è una partizione dell'insieme Y allora $\{B_i \times C_j : (i, j) \in I \times J\}$ è una partizione di $X \times Y$.

Una relazione di equivalenza su un insieme \mathcal{A} è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. Dato $a \in \mathcal{A}$, l'insieme degli elementi di \mathcal{A} equivalenti da a costituiscono la classe di equivalenza rappresentata da a . L'insieme delle classi di equivalenza \mathcal{A}/ρ si chiama insieme quoziente ed è una partizione di \mathcal{A} . L'insieme delle relazioni di equivalenza su \mathcal{A} è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni di \mathcal{A} .

5.13. Si determini una relazione simmetrica, transitiva ma non riflessiva.

5.14. Si consideri in \mathbf{Z} la relazione ρ definita da:

$$a \rho b \Leftrightarrow a = b \text{ o } a, b \in \mathbf{N}.$$

Dimostrare che ρ è una relazione di equivalenza su \mathbf{Z} e determinare l'insieme quoziente.

5.15. Si consideri la relazione \approx su $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definita da:

$$(m, n) \approx (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$$

Dimostrare che \approx è una relazione di equivalenza il cui insieme quoziente ha la stessa cardinalità di \mathbf{Z} .

5.16. Si consideri l'insieme $B = \{n \in \mathbf{N} : n = 2^r 3^s \text{ con } r, s \in \mathbf{N}\}$. Dimostrare che la relazione ρ su B definita da:

$$2^r 3^s \rho 2^t 3^u \Leftrightarrow r + s = t + u$$

è una relazione di equivalenza. Determinare le classi di equivalenza rappresentate dai seguenti numeri: 1, 3, 4, 12. La relazione ρ' su B definita da:

$$2^r 3^s \rho' 2^t 3^u \Leftrightarrow r + u = s + t$$

È di equivalenza? Quale proprietà ha?

5.17. Sia ρ una relazione su A simmetrica e transitiva. Si provi che ρ è di equivalenza se e solo se: per ogni $a \in A$ esiste $b \in A$ tale che $a \rho b$.

5.18. Sia ρ una relazione su A . Dimostrare che ρ è di equivalenza se e solo se ρ^* è di equivalenza.

5.19. Si consideri la relazione \approx su $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ definita da:

$$(m, n) \approx (p, q) \Leftrightarrow mq = np$$

Dimostrare che \approx è una relazione di equivalenza il cui insieme quoziente ha la stessa cardinalità di \mathbf{Q} .

Una funzione $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ individua una relazione di equivalenza su \mathcal{A} \sim_f definita da: $x \sim_f z \Leftrightarrow f(x) = f(z)$, l'insieme quoziente si dice nucleo di f e si indica con $\text{Ker } f$.

5.20. Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 1$, determinare l'immagine di f . Determinare il nucleo di f .

5.21. Dimostrare che una funzione $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se e solo se $\text{Ker } f = 0$, dove 0 denota il minimo elemento di $(\Pi(A), \leq)$.